Ueber die

Abbildung eines astigmatischen Objects durch eine Linse

für parallelen Durchgang der Lichtstrahlen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

Philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Ludwig Gartenschläger
aus Güstrow.

München 1888.
Druck von R. Oldenbourg.

Ueber die

Abbildung eines astigmatischen Objects durch eine Linse für parallelen Durchgang der Lichtstrahlen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der

Philosophischen Facultät der Universität Rostock

vorgelegt

von

Ludwig Gartenschläger
aus Güstrow.

München 1888.
Druck von R. Oldenbourg.

Referent:

Herr Professor **Dr. Matthiessen.**

Ueber die Abbildung eines astigmatischen Objects durch eine Linse für parallelen Durchgang der Lichtstrahlen.

Einleitung.

Die gewöhnlichen dioptrischen Formeln für sphärische Flächen gelten nur dann, wenn die auffallenden Strahlen mit den Einfallsloten sehr kleine Winkel bilden, so dass man sin und tg der Bogen mit den Bogen selbst, cos derselben mit der Einheit vertauschen kann. Für ein centrirtes System brechender Flächen erfordert diese Bedingung, dass die Strahlen mit dem allen Flächen gemeinsamen Einfallslote, nämlich der Centrale, sehr kleine Winkel bilden, und es gelten daher die dioptrischen Formeln, wie sie in den Lehrbüchern der Physik entwickelt sind, in aller Strenge nur für unendlich dünne Strahlenbündel, welche in und neben der Richtung der Centrale (paraxial) einfallen. Gauss hat in seinen klassischen „Dioptrischen Untersuchungen" (1841) diese Beschränkungen bekanntlich zu Grunde gelegt. Sind sie erfüllt, so schneiden sich die von einem Punkte ausgehenden Strahlen nach der Brechung an beliebig vielen sphärischen Flächen wieder in einem Punkte, d. h. sie bleiben homocentrisch.

In Wirklichkeit aber haben die Strahlenbündel erstens eine gewisse Dicke, zweitens bilden sie grössere Winkel mit der Axe.

Der ganze Complex des von einem Punkte ausgehenden Strahlenkegels erfährt nach der Brechung an einer sphärischen Fläche eine Modification, bildet eine Brennfläche, gebildet von den Schnittpunkten benachbarter gebrochener Strahlen. Dieselbe ist identisch mit der Krümmungsmittelpunktsfläche der Wellenfläche und besitzt im Haupttheil nach einmaliger Brechung die Form des sog. Sturm'schen Conoids [1]). Die Brennfläche leuchtet, da sich in ihr Lichtstrahlen schneiden; helleres Leuchten findet aber nur an den Stellen statt, wo die Schnittpunkte eng zusammen liegen — Brennlinien resp. Brennpunkte.

---

1) Sturm, Compt. rend. (1845). Uebersetzt in Pogg. Ann. Bd. 65 (1845).

Fällt ein unendlich dünnes Bündel auf die Fläche, so besteht das Bild auch nur aus unendlich kleinen Theilen der Brennfläche, nämlich aus den beiden Brennlinien.

Sind mehrere brechende Flächen vorhanden, so ist die Lage der Brennlinien auch für peripherische Lage des leuchtenden Punktes noch leicht zu bestimmen, falls ein unendlich dünnes Strahlenbündel vorgelegt ist. Für ein solches Strahlenbündel gilt nämlich das Gesetz, dass alle Strahlen nach der Brechung durch zwei unendlich kleine, gerade Brennlinien hindurchgehen, wie Sturm, der Begründer der Theorie des Astigmatismus, gezeigt hat.

Sturm und Kummer haben ausserdem den Satz aufgestellt, dass die beiden Brennlinien immer auf dem Hauptstrahle des Bündels senkrecht stehen. Dies Theorem hat jedoch streng keine allgemeine Giltigkeit; seine Unzulänglichkeit für die geometrische Optik ist mehrfach mathematisch unzweideutig nachgewiesen worden [1]).

Solange die brechenden sphärischen Flächen centrirt sind, steht die erste Brennlinie noch auf dem Hauptstrahle senkrecht. Ist diese Bedingung aber nicht erfüllt, so kann auch die erste Brennlinie eine Neigung gegen den Hauptstrahl erhalten [2]).

Das Bild eines von der Centrale entfernten leuchtenden Punktes besteht also bei genügender Dünne des auffallenden Strahlenbündels aus zwei getrennten Brennlinien, und zwar liegen diese in den beiden Hauptnormalschnitten der Wellenfläche.

Für die vorliegende Arbeit habe ich mir als Hauptaufgabe das Problem gestellt, die für die Abbildung eines solchen Punktes geltenden mathematischen Gesetze zu erweitern für ein sehr kleines astigmatisches, peripherisch gelegenes Quadrat, dessen Seiten senkrecht zum einfallenden Strahle sind und ein beliebiges Azimuth gegen den Axenschnitt bilden, und zwar für den Fall des parallelen Durchgangs der Strahlen durch eine homogene, sphärische, ungleichseitige Linse.

Um dies Problem zu lösen, d. h. um die dioptrischen Elemente für das austretende Strahlenbündel zu bestimmen, theilen wir die Aufgabe in mehrere Theile, indem wir:

I. Die Bedingungen feststellen, die für das auffallende Strahlenbündel erfüllt sein müssen, damit der Durchgang der Strahlen parallel sei.

---

1) Man vergl. Reusch, Reflexion und Brechung des Lichtes an sphärischen Flächen etc. Pogg. Ann. Bd. 130 S. 497 (1867).

L. Matthiessen, Untersuchungen über die Lage der Brennlinien eines unendlich dünnen Strahlenbündels etc. Acta mathem. Cah. IV. II. (1884).

2) Man vergl. unten II. § 2 in fine. Ausserdem: L. Matthiessen, Münchener Sitzungsberichte Bd. 13 S. 44 ff. (1883).

II. Die Gleichungen ableiten, die für den zu betrachtenden Fall den Ort der Bilder, die Azimuthe der Seiten der letzteren und die Bildgrössen finden lassen.

III. Zur Bestätigung der Theorie die Resultate einer Reihe von praktisch ausgeführten Versuchen angeben.

I. Theil.

Bedingung des parallelen Durchgangs.

§ 1.

Beweis, dass nur ein Axenschnitt der Linse betrachtet zu werden braucht.

Es lässt sich zeigen, dass für die Brechung an einer beliebigen Fläche Einfalls- und Brechungsebene zusammenfallen. Nimmt man dies zunächst als richtig an, so folgt unmittelbar, dass bei einer Linse der parallele Durchgang in einem Axenschnitt stattfinden muss.

Nämlich, soll die Bedingung des parallelen Durchgangs erfüllt sein, so muss auch der an der zweiten Fläche gebrochene Strahl in der Einfallsebene des auf die erste Fläche auffallenden Strahles gelegen sein. Diese Ebene geht nun durch den Mittelpunkt der ersten Linsenfläche, d. h. durch einen Punkt der Centrale hindurch. Könnte gezeigt werden, dass sie noch durch einen zweiten Punkt der Centrale gehen muss, so wäre der Beweis geliefert. Dies folgt aber daraus, dass bei der Brechung an der zweiten Fläche Einfallslot, auffallender und gebrochener Strahl wiederum laut Voraussetzung eine und dieselbe Ebene bilden, denn dies ist nur so möglich, dass das Einfallslot der zweiten Fläche in die ursprüngliche Einfallsebene hineinfällt, d. h. dass letztere auch durch den Mittelpunkt der zweiten Linsenfläche geht.

Denjenigen Punkt, in welchem der innerhalb der Linse verlaufende Strahl die Centrale schneidet, nennt man den „optischen Mittelpunkt“.

Es erübrigt, die Richtigkeit obiger Annahme nachzuweisen.

Betrachtet man eine beliebige Fläche als Trennungsfläche zweier brechender Medien, und ist in dem einen Medium ein leuchtender Punkt L gegeben, der einen Lichtstrahl aussendet, welcher nach der Brechung durch den Punkt L' geht, so tritt der Fermat'sche Satz in Kraft:

„Die optische Länge (Gangzeit) eines Strahles zwischen zwei Punkten ist ein Minimum“.

Ist die Gleichung der trennenden Fläche, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem:

$$F(xyz) = 0,$$

bedeutet ferner:

v die Geschwindigkeit des Lichtes in dem vorderen Medium,

v_1 diejenige in dem hinteren Medium,

und sind schliesslich:

$x_1\, y_1\, z_1$ die Coordinaten des Punktes L,

$x_1'\, y_1'\, z_1'$ diejenigen des Punktes L',

so ist nach dem Bemerkten die Aufgabe, den Weg des Lichtstrahls zwischen den beiden Punkten zu bestimmen, ein Problem der Maxima und Minima einer Function von mehreren Veränderlichen.

In einem und demselben Medium kann der Weg nur ein geradliniger sein. Sei derselbe im ersten Medium $L\,X$, im zweiten Medium $X\,L'$, und bezeichne T die Zeit, welche das Licht gebraucht, um den Weg $L\,X\,L'$ zurückzulegen, so besteht die Gleichung:

$$T = \frac{L\,X}{v} + \frac{X\,L'}{v_1},$$

oder, wenn $x\,y\,z$ die Coordinaten des Punktes X sind:

$$T = \frac{1}{v} V\left\{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2\right\} +$$

$$\frac{1}{v_1} V\left\{(x_1' - x)^2 + (y_1' - y)^2 + (z_1' - z)^2\right\}.$$

Die Coordinaten von X müssen der Flächengleichung:

$$F(x\,y\,z) = 0 \qquad (1$$

genügen, sodass T als Function von x und y aufzufassen ist.

Bildet man jetzt die partiellen Ableitungen von T nach x und y und setzt diese der Null gleich, so ergibt sich:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{v} \cdot \frac{x - x_1 + (z - z_1)\frac{\partial z}{\partial x}}{L\,X} - \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x_1' - x + (z_1' - z)\frac{\partial z}{\partial x}}{X\,L'} = 0 \qquad (2$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{1}{v} \cdot \frac{y - y_1 + (z - z_1)\frac{\partial z}{\partial y}}{L\,X} - \frac{1}{v_1} \cdot \frac{y_1' - y + (z_1' - z)\frac{\partial z}{\partial x}}{X\,L'} = 0. \qquad (3$$

Auflösbar nach x, y und z sind die drei Gleichungen 1, 2 und 3 in diesem ganz allgemeinen Falle nicht. Sie lassen sich jedoch so verwerthen, dass obige Behauptung einleuchtend wird.

Dazu formen wir die Gleichungen etwas um und setzen zunächst die Winkel, welche $L\,X$ mit den Coordinatenaxen bildet, resp.

$$= \alpha,\ \beta,\ \gamma;$$

diejenigen, welche $X\,L'$ mit ihnen bildet, resp.

$$= \alpha',\ \beta',\ \gamma'.$$

Dann nehmen die Gleichungen 2 und 3 die Form an:

$$\frac{1}{v}\left(\cos\alpha + \cos\gamma \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{1}{v_1}\left(\cos\alpha' + \cos\gamma' \cdot \frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$$

$$\frac{1}{v}\left(\cos\beta + \cos\gamma \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) - \frac{1}{v_1}\left(\cos\beta' + \cos\gamma' \cdot \frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

Setzen wir noch den relativen Brechungsindex:

$$\frac{v}{v_1} = n,$$

so folgt unmittelbar:

$$\cos\alpha - n \cdot \cos\alpha' + (\cos\gamma - n \cdot \cos\gamma')\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \qquad (4$$

$$\cos\beta - n \cdot \cos\beta' + (\cos\gamma - n \cdot \cos\gamma')\frac{\partial z}{\partial y} = 0. \qquad (5$$

Diese Bedingungen sind geometrisch auszuwerthen.

Wir legen eine Ebene durch LX und XL', deren Gleichung die Form gegeben werden kann:

$$A(\xi - x) + B(\eta - y) + \zeta - z = 0.$$

Dabei sind dann die Gleichungen von LX:

$$\xi - x = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma}(\zeta - z)$$

$$\eta - y = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}(\zeta - z),$$

diejenigen von XL':

$$\xi - x = \frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'}(\zeta - z)$$

$$\eta - y = \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'}(\zeta - z),$$

und dies ergibt durch Einsetzung der Werthe in die Gleichung der Ebene:

$$A \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma} + B \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\gamma} + 1 = 0$$

$$A \cdot \frac{\cos\alpha'}{\cos\gamma'} + B \cdot \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'} + 1 = 0.$$

Hieraus erhält man:

$$A = \frac{\cos\beta \cdot \cos\gamma' - \cos\beta' \cdot \cos\gamma}{\cos\alpha \cdot \cos\beta' - \cos\alpha' \cdot \cos\beta}$$

$$B = \frac{\cos\gamma \cdot \cos\alpha' - \cos\gamma' \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta' - \cos\alpha' \cdot \cos\beta}$$

sodass die Gleichung der Ebene LXL' lautet:

$$\begin{aligned}&(\cos\beta\cdot\cos\gamma' - \cos\beta'\cdot\cos\gamma)(\xi - x) + \\ &(\cos\gamma\cdot\cos\alpha' - \cos\gamma'\cdot\cos\alpha)(\eta - y) + \\ &(\cos\alpha\cdot\cos\beta' - \cos\alpha'\cdot\cos\beta)(\zeta - z) = 0.\end{aligned} \qquad (6$$

Weiter: Die Gleichungen der Normale zur Fläche im Einfallspunkte X haben die Form:

$$\xi - x = -\frac{\partial z}{\partial x}(\zeta - z)$$

$$\eta - y = -\frac{\partial z}{\partial y}(\zeta - z).$$

Hierin sind die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ einzusetzen, welche sich aus den Gleichungen 4 und 5 ergeben, nämlich:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\cos\alpha - n\cdot\cos\alpha'}{\cos\gamma - n\cdot\cos\gamma'}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\cos\beta - n\cdot\cos\beta'}{\cos\gamma - n\cdot\cos\gamma'},$$

sodass die Gleichungen der Normale werden:

$$\xi - x = \frac{\cos\alpha - n\cdot\cos\alpha'}{\cos\gamma - n\cdot\cos\gamma'}(\zeta - z)$$

$$\eta - y = \frac{\cos\beta - n\cdot\cos\beta'}{\cos\gamma - n\cdot\cos\gamma'}(\zeta - z).$$

Nun zeigt sich, dass, wenn man diese Werthe von $\xi - x$ und $\eta - y$ in die Gleichung der Ebene (6) einsetzt, man nach einigen Transformationen die identische Gleichung erhält:

$$\begin{aligned}&n\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha'\cdot\cos\gamma' - n\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha'\cdot\cos\gamma' + \\ &n\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha'\cdot\cos\beta' - n\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha'\cdot\cos\beta' + \\ &n\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta'\cdot\cos\gamma' - n\cdot\cos\alpha\cdot\cos\beta'\cdot\cos\gamma' + \\ &\cos\alpha\ \cos\beta\cdot\cos\gamma' - \cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma' + \\ &\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\cos\beta' - \cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\cos\beta' + \\ &\cos\beta\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha' - \cos\beta\ \cos\gamma\cdot\cos\alpha' = 0.\end{aligned}$$

Einfalls- und Brechungsebene fallen also in der That zusammen. Dasselbe gilt, wenn das Object von beliebiger endlicher Grösse ist. Es ist dann der Hauptstrahl des Strahlenbündels zu Grunde zu legen.

§ 2.

Bestimmung der Coordinaten des Einfallspunktes.

Es sei ein leuchtender Punkt L und eine Linse vorgelegt. Um dann die Coordinaten desjenigen Punktes zu finden, in welchem der von dem Objecte ausgesandte und parallel durchgehende Strahl die

vordere Fläche der Linse trifft, kann man sich nach dem Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf Betrachtungen in einer durch L und die Centrale gelegten Ebene beschränken (Fig. 1).

Im folgenden möge bedeuten:

H und G die Mittelpunkte resp. der ersten und zweiten Linsenfläche,

r_1 und r_2 die Radien der genannten sphärischen Flächen,

A den gesuchten Punkt mit den Coordinaten x und y,

d die Dicke der Linse, schliesslich

$L\,A\,B\,M$ den zu betrachtenden Lichtstrahl.

$G\,H$ sehen wir als Abscissen-Axe eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems an, dessen Anfangspunkt H sein soll.

Für parallelen Durchgang der Strahlen sind die Winkel, welche die Radien $A\,H$ und $G\,B$ mit der Centrale bilden, bekanntlich einander gleich, d. h. es ist:

$$\sphericalangle\,\vartheta = \lambda.$$

Bei parallelem Durchgange werden also $A\,B$, d, sowie die Centrale $D = G\,H$ durch den optischen Mittelpunkt C in Theile getheilt, welche

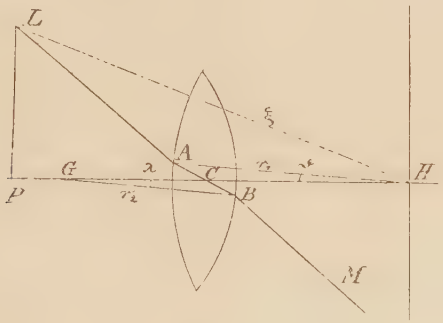

Fig. 1.

den Radien proportional sind. Daraus folgt zunächst, dass C ein fester Punkt ist. Ferner ergeben sich daraus die Coordinaten dieses festen Punktes. Aus der Proportion:

$$G\,C : C\,H = r_2 : r_1 \text{ oder}$$

$$(G\,C + C\,H) : C\,H = (r_2 + r_1) : r_1$$

folgt nämlich:

$$C\,H = \frac{(G\,C + C\,H)\,r_1}{r_1 + r_2}$$

$$= \frac{D \cdot r_1}{r_1 + r_2}.$$

worin:

$$D = r_1 + r_2 - d.$$

Diesen für CH gefundenen Werth wollen wir z. A. $= c$ setzen. Das Problem lässt sich dann folgendermaassen aussprechen:

Es sind zwei Punkte fest gegeben:

$$L: x_1\ y_1$$
$$C: c\ \ 0,$$

und ein Kreis:

$$x^2 + y^2 = r_1^2.$$

Es soll der Weg eines Lichtstrahls LAC so bestimmt werden, dass auf ihm das Licht in der kürzesten Zeit von L nach C gelangt.

In diesem Falle ist

$$T = \frac{1}{v}\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}} + \frac{1}{v_1}\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}$$

oder

$$T = n\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}} + n_1\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}},$$

wenn n und n_1 die Brechungsindices der beiden Medien bedeuten.

Wir wenden das Verfahren von Lagrange an, indem wir setzen:

$$F = n\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}} + n_1\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}} - \lambda(x^2 + y^2 - r_1^2)$$

und bilden

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{n(x_1 - x)}{\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}}} + \frac{n_1(x - c)}{\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}} - 2\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{n(y_1 - y)}{\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}}} + \frac{n_1 y}{\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}} - 2\lambda y = 0.$$

Diese beiden Gleichungen, in Verbindung mit der Flächengleichung:

$$x^2 + y^2 - r_1^2 = 0,$$

sind hinreichend und nothwendig zur Bestimmung von x, y und λ. Dabei ist λ ein unbekannter Factor, der wieder herauszuschaffen ist.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt:

$$-\frac{n(x_1 - x)y}{\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}}} + \frac{n_1(x - c)y}{\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}} + \\ + \frac{n(y_1 - y)x}{\sqrt{\{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2\}}} - \frac{n_1 xy}{\sqrt{\{(x - c)^2 + y^2\}}} = 0$$

oder

$$\frac{n(y_1 x - x_1 y)}{\sqrt{(\alpha^2 - 2x_1 x - 2y_1 y)}} = \frac{n_1 cy}{\sqrt{\{\beta^2 - 2cx\}}},$$

worin z. A. gesetzt ist:

$$x_1^2 + y_1^2 + r_1^2 = \alpha^2$$
$$c^2 + r_1^2 = \beta^2.$$

Erhebt man beide Seiten der Gleichung ins Quadrat, so resultirt:

$$\frac{n^2 (y_1^2 x^2 + x_1^2 y^2 - 2 x_1 y_1 x y)}{\alpha^2 - 2 x_1 x - 2 y_1 y} = \frac{n_1^2 c^2 y^2}{\beta^2 - 2 c x}$$

oder

$$n^2 (\beta^2 - 2 c x)(y_1^2 x^2 + x_1^2 y^2) - n_1^2 c^2 y^2 (\alpha^2 - 2 x_1 x)$$
$$= 2 n^2 (\beta^2 - 2 c x) x_1 y_1 x y - 2 n_1^2 c^2 y_1 y^2.$$

Setzt man hierin für y seinen Werth ein:

$$y = \sqrt{r_1^2 - x^2},$$

und setzt man zugleich z. A.:

$$y_1^2 - x_1^2 = \eta^2,$$

so bekommt man die Gleichung:

$$n^2 (\beta^2 - 2 c x)(\eta^2 x^2 + r_1^2 x_1^2) - n_1^2 c^2 (r_1^2 - x^2)(\alpha^2 - 2 x_1 x)$$
$$= 2 n^2 x_1 y_1 x \sqrt{r_1^2 - x^2} - 2 n_1^2 c^2 y_1 (r_1^2 - x^2) \cdot \sqrt{r_1^2 - x^2}.$$

Erhebt man schliesslich nochmals beide Seiten ins Quadrat, um die Irrationalitäten fortzuschaffen, so erhält man:

$$n^4 (\beta^4 - 4 \beta^2 c x + 4 c^2 x^2)(\eta^4 x^4 + 2 x_1^2 r_1^2 \eta^2 x^2 + x_1^4 r_1^4)$$
$$+ n_1^4 c^4 (r_1^4 - 2 r_1^2 x^2 + x^4)(\alpha^4 - 4 \alpha^2 x_1 x + 4 x_1^2 x^2)$$
$$- 2 n^2 n_1^2 c^2 (\beta^2 - 2 c x)(\eta^2 x^2 + x_1^2 r_1^2)(r_1^2 - x^2)(\alpha^2 - 2 x_1 x)$$
$$= 4 n^4 x_1^2 y_1^2 x^2 (r_1^2 - x^2)$$
$$+ 4 n_1^4 c^4 y_1^2 (r_1^4 - 2 r_1^2 x^2 + x^4)(r_1^2 - x^2)$$
$$- 8 n^2 n_1^2 c^2 x_1 y_1^2 x (r_1^4 - 2 r_1^2 x^2 + x^4).$$

Dies ergibt für die Bestimmung von x eine bikubische Gleichung von deren Aufstellung abgesehen werden soll. Hat man für einen speciellen Fall x hieraus berechnet, so findet man das zugehörige y mit Hilfe der Gleichung:

$$x^2 + y^2 = r_1^2.$$

Hiermit ist die Bedingung, dass der Durchgang eines Lichtstrahls der parallele sei, analytisch ausgedrückt, indem die Coordinaten des Einfallspunktes bestimmt sind.

Für praktische Messungen ist die bikubische Gleichung allerdings kaum zu verwenden. Man kann aber auch davon absehen, denn im Verlaufe dieser Arbeit — im III. Theile, § 1 — zeigt sich, dass der Winkel ϑ $(= \lambda)$ immer sehr klein bleibt, kaum über $\frac{1}{2}^0$ hinausgeht, sodass also y sehr klein ist und x infolgedessen sich von r_1 sehr wenig unterscheidet.

II. Theil.

Ableitung der mathematischen Gesetze der Abbildung.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Ist das Object nicht ein leuchtender Punkt, sondern eine Strecke, so werden die Bilder theils Rechtecke, theils Rhomboide sein, je nach den Winkeln, welche die Strecke mit der Centrale und der Einfallsebene bildet[1]).

Ist aber ein leuchtendes Object vorhanden, welches nach zwei Dimensionen ausgedehnt ist, so erscheint das Bild allenthalben undeutlich und verzerrt, weil keine Bildpunkte, sondern Bildlinien entstehen. Verhältnismässig deutlich sind im Bilde noch solche Linien, deren Punkte in der Richtung der Linie selbst verzerrt sind. Von einem Quadrate erscheint also an der Stelle der ersten Brennlinie ein Bild mit scharfen Begrenzungslinien in der einen Richtung, verschwommenen Linien in der darauf senkrechten Richtung; dagegen an der Stelle der zweiten Brennlinie ein Bild mit scharfen Begrenzungslinien in der zweiten, verschwommenen Linien in der ersten Richtung.

Daraus folgt, dass bei einem leuchtenden Objecte von endlicher Grösse, z. B. einem Quadrate, dieselben Formeln anwendbar sind wie bei einem leuchtenden Punkte; der Unterschied besteht nur darin, dass man in diesem Falle in den beiden Brennlinien zwei scharfe, deutliche Bilder erhält, in jenem Falle dagegen nirgends deutliche Bilder entstehen, sondern ein sog. astigmatisches Quadrat.

Soll für die vorliegende Arbeit das Object von vorneherein ein astigmatisches Quadrat sein, so kann man sich den Vorgang so denken, dass ursprünglich ein sehr kleines Quadrat gegeben ist, welches Strahlen auf eine brechende sphärische Fläche aussendet und also durch diese zu einem astigmatischen Quadrate abgebildet wird, und dass schliesslich dahinter die Linse sich befindet.

In Fig. 2 sei $a_1 b_1 c_1 d_1$, $a_2 b_2 c_2 d_2$ ein solches sehr kleines astigmatisches Quadrat, von dem ein Strahlenbündel schief auf eine Linse auffällt, jedoch so, dass der Hauptstrahl nach der Brechung an der zweiten Fläche parallel mit seiner Einfallsrichtung ist. Dabei möge $a_2 b_2$ und $c_2 d_2$ den Strahlenfächern erster Art, $a_1 c_1$ und $b_1 d_1$ denjenigen zweiter Art angehören.

Im vorigen Paragraphen ist für einen leuchtenden Punkt die Richtung des auffallenden Strahles für parallelen Durchgang bestimmt.

---

1) L. Matthiessen, Ueber die Form astigmatischer Strahlenbündel etc. Münchener Sitzungsberichte Bd. 13 S. 49 ff. (1883).

Soll letztere Bedingung für das vom astigmatischen Quadrate ausgesandte dünne Strahlenbündel auch erfüllt sein, so muss der Hauptstrahl des letzteren dieselbe Richtung haben, wie der vorhin bestimmte Strahl, vorausgesetzt, dass der Auffallspunkt derselbe ist. Die Lage des Objects ist demnach bei fester Stellung der Linse keine willkürliche, sobald die Grösse des Einfallswinkels bestimmt ist. Mit dem Einfallswinkel ist nämlich zugleich der Auffallspunkt bekannt, wie später gezeigt wird.

Dabei liegt dann der Hauptstrahl auch stets mit der Centrale in einer Ebene, und dies ist nothwendig, wenn die Betrachtungen nicht ungemein complicirt werden sollen.

Wir wollen nun annehmen, dass das Object eine solche Lage habe, dass der Durchgang der Strahlen der parallele sei, wollen aber zunächst nicht direct von dem Quadrate ausgehen, sondern von zwei Brennlinien. Diese erhalten wir, indem wir durch diejenigen Punkte des Hauptstrahls, in welchen derselbe von den beiden Theilen des astigmatischen Quadrats getroffen wird, Parallele zu den jedesmaligen scharf begrenzten Seiten des Objects ziehen. Da die Seiten des letzteren nach Voraussetzung senkrecht zum Hauptstrahle sind, so sind es auch diese Parallelen. Durch diese Strecken legen wir ein astigmatisches Strahlenbündel, welches selbige als Brennlinien enthält, und sehen zu, wo dieselben durch die Linse abgebildet werden und wie ihr Azimuth zum Axenschnitt sich gedreht hat. An demselben Orte würde auch die Abbildung des vorgelegten Quadrats geschehen, mit denselben Azimuthen der Seiten.

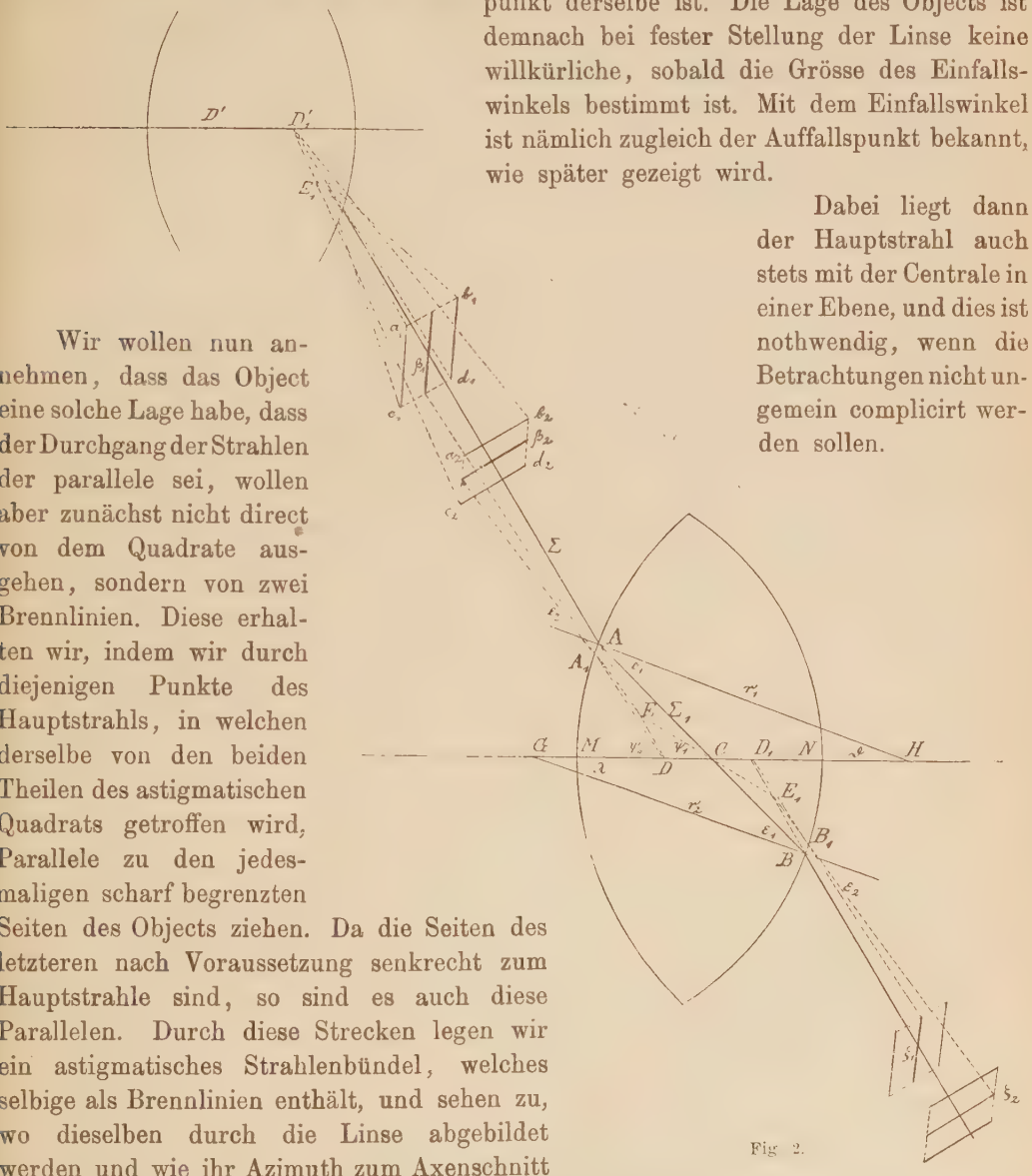

Fig. 2.

Sodann gehen wir wieder zum Quadrate über und ziehen auch seine Grösse, sowie die Grösse der Bilder in Betracht.

Da die Linse laut Voraussetzung homogen und auch unkrystallinisch ist, so gilt der Malus'sche Satz, d. h. so behalten die von einem leuchtenden Punkte ausgehenden Strahlen nach beliebig vielen Brechungen die Eigenschaft, ein orthogonales Flächensystem (Wellenflächen) zu besitzen. Damit ist aber gegeben, dass ein sehr dünnes astigmatisches Strahlenbündel, dessen Brennlinien zu einander und auch zum Hauptstrahl rechtwinklig stehen, nach der Brechung an beliebig vielen Flächen wenigstens zwei zu einander senkrechte Brennlinien behält, immer vorausgesetzt, dass die durchlaufenen Medien homogen und unkrystallinisch sind.

Lässt man das Strahlenbündel auf die Linse auffallen, so wird es durch die vordere Fläche derselben so gebrochen, dass es wieder zwei Brennlinien hat, die nun ihrerseits als Object für die hintere Fläche der Linse dienen, um hier denselben Process der Abbildung nochmals vor sich gehen zu lassen. Sämmtliche Strahlen, die von einer Brennlinie ausgehen und dem Strahlenbündel angehören, gehen auch durch beide Brennlinien des gebrochenen Strahlenbündels.

§ 2.

Ort der Bilder, sowie ihr Azimuth gegen den Axenschnitt.

C. Neumann[1]) hat den Fall der Brechung eines astigmatischen Strahlenbündels an einer beliebigen Fläche behandelt, wonach sich drei Formeln aufstellen lassen, die zur Bestimmung der Azimuthe der Brennlinien des gebrochenen Strahlenbündels und ihrer Abstände von der Fläche geeignet sind.

Erste Fläche.

Ist

$$f(x\,y\,z) = 0$$

die Gleichung einer brechenden Fläche, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinaten-System, und sind zwei Punkte diesseits und jenseits der Fläche gegeben, so wird es unter allen von dem diesseitigen Punkte ausgehenden Strahlen einen geben, welcher nach der Brechung durch den zweiten Punkt geht. Es möge dieser Strahl in dem Punkte $(x\,y\,z)$ auf die Fläche treffen. Dann ist zunächst nach dem Fermat'schen Satze:

$$n\varrho + n_1\varrho_1 = u = \text{Minimum}, \qquad (1$$

wenn n und n_1 die Indices der beiden Medien, ϱ und ϱ_1 resp. die Object- und Bilddistanz von dem Einfallspunkte bedeuten. Vermittelst

1) C. Neumann, Ueber die Brechung eines unendlich dünnen regulären Strahlenbündels. Berichte d. kgl. sächs. Ges. d. Wissensch., Math.-Phys. Klasse (1880).

des Lagrange'schen Verfahrens ergeben sich ferner die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} - \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} - \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

worin λ einen unbestimmten Factor bedeutet. Hieraus folgt:

$$n \frac{\partial \varrho}{\partial x} + n_1 \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = n A - n_1 A_1$$
$$n \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial y} + n_1 \cdot \frac{\partial \varrho_1}{\partial y} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = n B - n_1 B_1 \qquad (2$$
$$n \frac{\partial \varrho}{\partial z} + n_1 \cdot \frac{\partial \varrho_1}{\partial z} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = n C - n_1 C_1,$$

wenn man die Richtungscosinus von ϱ und ϱ_1 resp. mit A, B, C und A_1, B_1, C_1 bezeichnet, und zwar in der Richtung des fortschreitenden Lichtes. Diese drei Gleichungen, verbunden mit der Gleichung der Fläche, reichen zur Bestimmung von A_1, B_1, C_1 aus.

Für einen Nachbarstrahl, der durch den Punkt $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ geht, ist:

$$n\ dA - n_1 \cdot dA_1 = \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y}\ dy + \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial z} \cdot dz \right) + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot d\lambda$$
$$n \cdot dB - n_1 \cdot dB_1 = \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial x} \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y \cdot \partial z} \cdot dz \right) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot d\lambda \quad (3$$
$$n \cdot dC - n_1 \cdot dC_1 = \lambda \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \cdot \partial x} \cdot dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \cdot \partial y} \cdot dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot dz \right) + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot d\lambda$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz = 0.$$

Wir setzen nun

$$x = y = z = 0,$$

d. h. machen den Einfallspunkt zum Anfangspunkt des Coordinaten-Systems, und wählen die in diesem Punkte auf der Fläche errichtete Normale zur Z-Axe. Ein auf die Fläche auffallendes unendlich dünnes Strahlenbündel trifft nur ein unendlich kleines Element der Oberfläche, sodass man für letztere das osculirende Parabolid setzen kann, dessen Gleichung ist:

$$f = \frac{M x^2 + N y^2 + 2\, O x y}{2} - z = 0,$$

worin M, N, O Constanten sind, die im Falle der Kugel folgende Werthe haben:

$$M = N = \frac{1}{r},\ O = 0.$$

Dann vereinfachen sich die Formeln 2 und 3 in folgender Weise:

$$\begin{aligned} n A - n_1 A_1 &= 0 \\ n B - n_1 B_1 &= 0 \\ n C - n_1 C_1 &= -\lambda, \end{aligned} \tag{4}$$

$$n \cdot dA - n_1 \cdot dA_1 = \lambda (M \cdot dx + O \cdot dy) = \lambda \cdot \frac{dx}{r}$$

$$n \cdot dB - n_1 \cdot dB_1 = \lambda (O \cdot dx + N \cdot dy) = \lambda \cdot \frac{dy}{r} \tag{5}$$

$$n \cdot dC - n_1 \cdot dC_1 = -d\lambda$$

und

$$dz = 0,$$

denn es ist

$$\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \lambda (M \cdot x + O \cdot y) = 0,$$

und ebenso

$$\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial z} = 0,$$

weil

$$x = y = z = 0.$$

Es lässt sich hier unmittelbar sehen, dass Einfalls- und Brechungsebene zusammenfallen. Da dies aber im Anfange schon auf einem anderen Wege nachgewiesen ist, so soll hier nicht noch einmal darauf eingegangen werden.

Ist der Einfallswinkel des auffallenden Lichtstrahls $= e_2$, der Brechungswinkel $= e_1$; ist ferner das Azimuth der Einfallsebene $= \varphi$, dasjenige der Brechungsebene $= \psi$, so hat man zunächst:

$$\begin{aligned} A &= \sin e_2 \cdot \cos \varphi \\ B &= \sin e_2 \cdot \sin \varphi \\ C &= \cos e_2 \\ dA &= \cos e_2 \cdot \cos \varphi \cdot de_2 - \sin e_2 \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \\ dB &= \cos e_2 \cdot \sin \varphi \cdot de_2 + \sin e_2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \\ dC &= -\sin e_2 \cdot de_2, \end{aligned}$$

und analoge Werthe für A_1, B_1, C_1, dA_1, dB_1, dC_1. Nun ist aber

$$\varphi = \psi,$$

und wählt man noch die Einfallsebene zur XZ-Ebene, so reduciren sich die Werthe von A, B, C etc., und die Gleichungen 4 und 5 nehmen, wenn man diese Werthe einsetzt, folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} n \cdot \sin e_2 - n_1 \cdot \sin e_1 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ n \cdot \cos e_2 - n_1 \cdot \cos e_1 &= -\lambda \\ n \cdot \cos e_2 \cdot d e_2 - n_1 \cdot \cos e_1 \cdot d e_1 &= \lambda \cdot \frac{dx}{r} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} n \cdot \sin e_2 \cdot d\varphi - n_1 \cdot \sin e_1 \cdot d\psi &= \lambda \cdot \frac{dy}{r} \\ -n \cdot \sin e_2 \cdot d e_2 + n_1 \cdot \sin e_1 \; d e_1 &= -d\lambda \end{aligned} \tag{7}$$

und

$$dz = 0.$$

Bezeichnet man, wie es gewöhnlich geschieht, die Hauptstrahlen des einfallenden und des gebrochenen Bündels mit Σ und Σ_1 (Fig. 2); ferner die vorderen Brennlinien mit β_1 und β_2, die hinteren mit α_1 und α_2 (letztere sind in der Figur nicht gezeichnet); ihre Abscissen, von der Fläche ab in der positiven Richtung gerechnet, resp. mit ξ_0, x_0, x_1, x_2; die Azimuthe von $\Sigma\beta_1$ und $\Sigma\alpha_1$ gegen die Einfallsebene resp. mit ϑ_1 und ϑ_2; schliesslich die Richtungscosinus von β_2 und β_1 resp. mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c})$ und $(\mathfrak{a}_1\ \mathfrak{b}_1\ \mathfrak{c}_1)$, so folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} &= \cos e_2 \cdot \sin \vartheta_1 & \mathfrak{a}_1 &= -\cos e_2 \cdot \cos \vartheta_1 \\ \mathfrak{b} &= \cos \vartheta_1 & \mathfrak{b}_1 &= \sin \vartheta_1 \\ \mathfrak{c} &= -\sin e_2 \cdot \sin \vartheta_1 & \mathfrak{c}_1 &= \sin e_2 \cdot \cos \vartheta_1. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich:

$$\begin{aligned} \mathfrak{a} \cdot dA + \mathfrak{b} \cdot dB + \mathfrak{c} \cdot dC &= \sin \vartheta_1 \cdot d e_2 + \cos \vartheta_1 \cdot \sin e_2 \cdot d\varphi \\ \mathfrak{a}_1 \cdot dA + \mathfrak{b}_1 \cdot dB + \mathfrak{c}_1 \cdot dC &= -\cos \vartheta_1 \cdot d e_2 + \sin \vartheta_1 \cdot \sin e_2 \; d\varphi. \end{aligned}$$

Ein unendlich naher Strahl (Nebenstrahl), dessen Einfallspunkt die Coordinaten dx, dy, dz hat, soll auch dem astigmatischen Strahlenbündel angehören. Dazu muss er durch die Brennlinien β_2 und β_1 gehen, etwa in den Punkten $(\xi\,\eta\,\zeta)$ und $(\xi_1\,\eta_1\,\zeta_1)$. Man erhält dann einmal:

$$\xi = A \cdot x_0 + \mathfrak{a} \cdot d\beta_2,$$

und ein anderes Mal:

$$\xi = dx + (A + dA)(x_0 + dx_0),$$

je nachdem man bei der Projection von ξ auf die X-Axe entweder auf dem Hauptstrahl, oder auf dem Nebenstrahl fortschreitet (Fig. 3). Ganz analog folgt:

$$\begin{aligned} \eta &= B x_0 + \mathfrak{b} \cdot d\beta_2 = dy + (B + dB)(x_0 + dx_0) \\ \zeta &= C x_0 + \mathfrak{c} \cdot d\beta_2 = dz + (C + dC)(x_0 + dx_0). \end{aligned}$$

Nun ist:

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1 = 0$$
$$\mathfrak{a}_1 A + \mathfrak{b}_1 B + \mathfrak{c}_1 C = 0,$$

da die ersten Brennlinien zu einander und auch zum Hauptstrahle

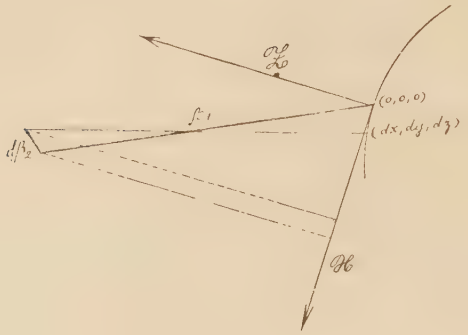

Fig. 3.

senkrecht sind. Multiplicirt man die drei Gleichungen für ξ_1, ζ der Reihe nach mit $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{c}_1$, so erhält man mithin:

$$\mathfrak{a}_1 \cdot dx + \mathfrak{b}_1 \cdot dy + \mathfrak{c}_1 \cdot dz + x_0 (\mathfrak{a}_1 \cdot dA + \mathfrak{b}_1 \cdot dB + \mathfrak{c}_1 \cdot dC) = 0,$$

und ebenso:

$$\mathfrak{a} \cdot dx + \mathfrak{b} \cdot dy + \mathfrak{c} \cdot dz + \xi_0 (\mathfrak{a} \cdot dA + \mathfrak{b} \cdot dB + \mathfrak{c} \cdot dC) = 0,$$

wenn man für ξ_1, η_1, ζ_1 dasselbe durchführt. Setzt man hierin die Werthe ein, so folgt:

$$\begin{aligned} & x_0 (-\cos \vartheta_1 \cdot de_2 + \sin \vartheta_1 \cdot \sin e_2 \cdot d\varphi) \\ & -\cos e_2 \cdot \cos \vartheta_1 \cdot dx + \sin \vartheta_1 \cdot dy \qquad = 0 \\ & \xi_0 (\sin \vartheta_1 \cdot de_2 + \cos \vartheta_1 \cdot \sin e_2 \cdot d\varphi) \\ & +\cos e_2 \cdot \sin \vartheta_1 \cdot dx + \cos \vartheta_1 \cdot dy \qquad = 0, \end{aligned}$$

und daraus wieder:

$$de_2 = -\left\{ \left(\frac{\cos^2 \vartheta_1}{x_0} + \frac{\sin^2 \vartheta_1}{\xi_0} \right) \cos e_2 \cdot dx + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{x_0} \right) \sin \vartheta_1 \cdot \cos \vartheta_1 \cdot dy \right\}$$

$$\sin e_2 \cdot d\varphi = -\left\{ \left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{x_0} \right) \sin \vartheta_1 \cdot \cos \vartheta_1 \cdot \cos e_2 \cdot dx + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\sin^2 \vartheta_1}{x_0} + \frac{\cos^2 \vartheta_1}{\xi_0} \right) dy \right\}.$$

Ist z. A.:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos^2\vartheta_1}{x_0}+\frac{\sin^2\vartheta_1}{\xi_0} &= P \\ \frac{\sin^2\vartheta_1}{x_0}+\frac{\cos^2\vartheta_1}{\xi_0} &= Q \\ \left(\frac{1}{\xi_0}-\frac{1}{x_0}\right)\cdot\sin\vartheta_1\cdot\cos\vartheta_1 &= R, \end{aligned}\right\} \qquad (8$$

so werden die letzten beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} de_2 &= -(P\cdot\cos e_2\cdot dx+R\cdot dy) \\ \sin e_2\cdot d\varphi &= -(R\cdot\cos e_2\cdot dx+Q\cdot dy). \end{aligned} \qquad (9$$

Die Formeln für das gebrochene Strahlenbündel sind diesen für das einfallende Bündel geltenden ganz analog. Substituirt man nämlich die soeben gefundenen Werthe von de_2 und $\sin e_2\cdot d\varphi$ in den beiden ersten Formeln von Gl. 7, so erhält man einen Ausdruck von der Form:

$$\begin{aligned} de_1 &= -(P_1\cdot\cos e_1\cdot dx+R_1\cdot dy) \\ \sin e_1\cdot d\varphi &= -(R_1\cdot\cos e_1\cdot dx+Q_1\cdot dy). \end{aligned}$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned} n_1\cdot P_1\cdot\cos^2 e_1 &= n\cdot P\cdot\cos^2 e_2+\frac{\lambda}{r_1} \\ n_1\cdot Q_1 &= n\cdot Q+\frac{\lambda}{r_1} \\ n_1\cdot R_1\cdot\cos e_1 &= n\cdot R\cdot\cos e_2. \end{aligned} \qquad (10$$

Ferner werden aber auch folgende Beziehungen gelten:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\cos^2\vartheta_2}{x_2}+\frac{\sin^2\vartheta_2}{x_1} &= P_1 \\ \frac{\sin^2\vartheta_2}{x_2}+\frac{\cos^2\vartheta_2}{x_1} &= Q_1 \\ \left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)\sin\vartheta_2\cdot\cos\vartheta_2 &= R_1. \end{aligned}\right\} \qquad (11$$

Wir wollen die Formeln 10 noch etwas anders schreiben. Aus den Gleichungen 6 folgt sofort:

$$\frac{n_1}{n}=\frac{\sin e_2}{\sin e_1},$$

und sodann:

$$\lambda = n\cdot\frac{\sin(e_2-e_1)}{\sin e_1}.$$

Setzt man diesen Werth von λ ein, und setzt man ferner noch:

$$\frac{n_1}{n}=\nu,$$

so resultiren die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \frac{r_1 \cdot P \cdot \cos^2 e_2 + \dfrac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1}}{\nu \cdot r_1 \cdot \cos^2 e_1} \\ Q_1 &= \frac{r_1 \cdot Q + \dfrac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1}}{\nu \cdot r_1} \\ R_1 &= \frac{R \cdot \cos e_2}{\nu \cdot \cos e_1}. \end{aligned}\right\} \qquad (12$$

Diese bestimmen P_1, Q_1, R_1, denn auf den rechten Seiten stehen lauter bekannte Grössen. P_1, Q_1, R_1 ihrerseits lassen durch Vermittlung der Gleichungen 11 die drei Unbekannten ϑ_2, x_1, x_2 finden, und zwar ergibt sich:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta_2 = \frac{2 R_1}{Q_1 - P_1},$$

während x_1 und x_2 als Wurzeln der quadratischen Gleichung auftreten:

$$\left(\frac{1}{x} - P_1\right)\left(\frac{1}{x} - Q_1\right) = R_1^2.$$

Die Abscissen-Gleichungen nehmen hier folgende Form an [1]):

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \left(\frac{\sin^2\vartheta_1}{x_0} + \frac{\cos^2\vartheta_1}{\xi_0}\right) + \frac{n r_1 \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)}\left(\frac{\sin^2\vartheta_2}{x_2} + \frac{\cos^2\vartheta_2}{x_1}\right) = 1$$

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_2}{\sin(e_2 - e_1)}\left(\frac{\cos^2\vartheta_1}{x_0} + \frac{\sin^2\vartheta_1}{\xi_0}\right) +$$

$$+ \frac{n \cdot r_1 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_1}{\sin(e_2 - e_1)}\left(\frac{\cos^2\vartheta_2}{x_2} + \frac{\sin^2\vartheta_2}{x_1}\right) = 1$$

$$\left(\frac{1}{\xi_0} - \frac{1}{x_0}\right)\frac{\cos e_2}{\cos e_1} \cdot \sin 2\vartheta_1 = \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)\frac{\sin e_2}{\sin e_1} \cdot \sin 2\vartheta_2.$$

Dieselben sind eine Verallgemeinerung der Fundamentalformel der Dioptrik:

$$\frac{f}{x_0} + \frac{\varphi}{x_1} = 1,$$

dagegen eine Specialisirung der für den Scheitel des elliptischen Berührungs-Paraboloides einer beliebigen Fläche geltenden Abscissen-Gleichungen [2]):

---

1) Matthiessen, Vorlesungen über die Dioptrik centrirter sphärischer Flächen für schiefe Incidenz. § 32.

2) Matthiessen, Ebendaselbst § 48.

$$\frac{-a^2b^2}{2c(b^2\cdot\sin^2\varepsilon+a^2\cdot\cos^2\varepsilon)}\cdot\frac{\sin e_1}{\sin(e_2-e_1)}\left(\frac{\sin^2\vartheta_1}{x_0}+\frac{\cos^2\vartheta_1}{\xi_0}\right)+$$
$$+\frac{n\cdot a^2b^2\cdot\sin e_1}{2c(b^2\cdot\sin^2\varepsilon+a^2\cdot\cos^2\varepsilon)\cdot\sin(e_2-e_1)}\left(\frac{\sin^2\vartheta_2}{x_2}+\frac{\cos^2\vartheta_2}{x_1}\right)=1$$
$$\frac{-a^2b^2}{2c(b^2\cdot\cos^2\varepsilon+a^2\cdot\sin^2\varepsilon)}\cdot\frac{\sin e_1\cdot\cos^2 e_2}{\sin(e_2-e_1)}\left(\frac{\cos^2\vartheta_1}{x_0}+\frac{\sin^2\vartheta_1}{\xi_0}\right)+$$
$$+\frac{n\cdot a^2\cdot b^2}{2c(b^2\cdot\cos^2\varepsilon+a^2\cdot\sin^2\varepsilon)}\cdot\frac{\sin e_1\cdot\cos^2 e_1}{\sin(e_2-e_1)}\left(\frac{\cos^2\vartheta_2}{x_2}+\frac{\sin^2\vartheta_2}{x_1}\right)=1$$
$$\frac{-a^2b^2\cdot\sin e_1\cdot\cos e_2\cdot\sin 2\vartheta_1}{2c(a^2-b^2)\cdot\sin(e_2-e_1)\cdot\sin 2\varepsilon}\left(\frac{1}{\xi_0}-\frac{1}{x_0}\right)+$$
$$+\frac{n\,a^2b^2\cdot\sin e_1\cdot\cos e_1\cdot\sin 2\vartheta_2}{2c(a^2-b^2)\cdot\sin(e_2-e_1)}\left(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2}\right)=1.$$

Hierin ist ε das Azimuth der Einfallsebene gegen einen Hauptnormalschnitt, a und b sind die Halbaxen der elliptischen Basis des Paraboloides im Abstande c vom Scheitel, d. h. es ist:

$$M=2c\left(\frac{\cos^2\varepsilon}{a^2}+\frac{\sin^2\varepsilon}{b^2}\right)$$
$$N=2c\left(\frac{\sin^2\varepsilon}{a^2}+\frac{\cos^2\varepsilon}{b^2}\right)$$
$$O=2c\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\cdot\sin\varepsilon\cdot\cos\varepsilon.$$

Man erhält rückwärts die für sphärische Flächen entwickelten Formeln, wenn man diese Werthe von M und $N=\frac{1}{r_1}$, denjenigen von $O=0$ setzt.

Wir nehmen an, dass das auffallende Strahlenbündel divergire, das gebrochene dagegen convergent sei. Dann sind ξ_0, x_0, P, Q, R als wesentlich negativ anzusehen.

Zweite Fläche.

Die beiden Brennlinien α_1 und α_2, deren Abscissen und Azimuthe hiermit bestimmt sind, dienen jetzt als Objecte für die zweite brechende Fläche. Setzt man die Länge von Σ_1 innerhalb der Linse $= T$ $(AB=T)$, so sind die neuen Objectweiten, die ja von der zweiten Fläche abgerechnet werden müssen:

$$\xi_{0,1}=x_1-T$$
$$\xi_{0,2}=x_2-T,$$

wobei zu beachten ist, dass $\xi_{0,1}$ und $\xi_{0,2}$ als wesentlich negativ anzusehen sind.

Haben d und D dieselbe Bedeutung wie oben, ist ferner ε_1 der Einfallswinkel, ε_2 der Brechungswinkel an der zweiten Fläche, so findet man leicht:

$$T = r_1 \cdot \cos e_1 + r_2 \cdot \cos \varepsilon_1 - \sqrt{[D^2 - (r_1 \cdot \sin e_1 + r_2 \cdot \sin \varepsilon_1)^2]}.$$

Der Durchgang der Strahlen soll aber der parallele sein, und demzufolge ist:

$$\varepsilon_1 = e_1$$
$$\varepsilon_2 = e_2,$$

also:

$$T = (r_1 + r_2) \cos e_1 - \sqrt{[D^2 - (r_1 + r_2)^2 \cdot \sin^2 e_1]}.$$

Der relative Brechungsindex ist hier $= \frac{1}{\nu}$. Für die gesuchten Abscissen ξ_1 und ξ_2, sowie das Azimuth ϑ_3 werden dann folgende Relationen gelten:

$$\frac{\cos^2 \vartheta_3}{\xi_2} + \frac{\sin^2 \vartheta_3}{\xi_1} = P_3$$
$$\frac{\sin^2 \vartheta_3}{\xi_2} + \frac{\cos^2 \vartheta_3}{\xi_1} = Q_3$$
$$\left(\frac{1}{\xi_1} - \frac{1}{\xi_2}\right) \sin \vartheta_3 \quad \cos \vartheta_3 = R_3,$$

und daneben:

$$\left.\begin{aligned} P_3 &= \frac{\nu \cdot r_2 \cdot P_2 \cdot \cos^2 e_1 + \nu \cdot \dfrac{\sin (e_1 - e_2)}{\sin e_2}}{r_2 \cdot \cos^2 e_2} \\ &= \frac{\nu \cdot r_2 \cdot P_2 \cdot \cos^2 e_1 - \dfrac{\sin (e_2 - e_1)}{\sin e_1}}{r_2 \cdot \cos^2 e_2}, \\ Q_3 &= \nu \cdot Q_2 + \frac{\nu \cdot \sin (e_1 - e_2)}{r_2 \cdot \sin e_2} \\ &= \nu \cdot Q_2 - \frac{1}{r_2} \cdot \frac{\sin (e_2 - e_1)}{\sin e_1}, \\ R_3 &= \nu \cdot R_2 \cdot \frac{\cos e_1}{\cos e_2}, \end{aligned}\right\} \quad (13$$

worin:

$$\left.\begin{aligned} P_2 &= \frac{\cos^2 \vartheta_2}{\xi_{0,2}} + \frac{\sin^2 \vartheta_2}{\xi_{0,1}} \\ Q_2 &= \frac{\sin^2 \vartheta_2}{\xi_{0,2}} + \frac{\cos^2 \vartheta_2}{\xi_{0,1}} \\ R_2 &= \left(\frac{1}{\xi_{0,1}} - \frac{1}{\xi_{0,2}}\right) \sin \vartheta_2 \cdot \cos \vartheta_2. \end{aligned}\right\} \quad (14$$

Hat man hiernach P_3, Q_3, R_3 berechnet, so folgt:

$$\operatorname{tg} 2\vartheta_3 = \frac{2R_3}{Q_3 - P_3},$$

während ξ_1 und ξ_2 als Wurzeln der quadratischen Gleichung auftreten:

$$\left(\frac{1}{\xi} - P_3\right)\left(\frac{1}{\xi} - Q_3\right) = R_3^2.$$

Diese beiden Formeln lassen die Lage der Bilder, sowie die Azimuthe der Brennebenen finden.

Ist ϑ_1 von 0^0 und von 90^0 verschieden, so ist bei schiefer Incidenz des astigmatischen Strahlenbündels auch $\vartheta_2 - \vartheta_1$ von 0^0 oder 90^0 verschieden, d. h. es tritt eine Drehung der Brennebene ein.

Bedeutend einfacher gestalten sich die Formeln für den speciellen Fall, dass von den Brennlinien des auffallenden Strahlenbündels die eine senkrecht zur Einfallsebene, die andere mithin in der Einfallsebene liegt. Dann ist nämlich:

$$\vartheta_1 = 90^0,$$

und daher:

$$P = \frac{1}{\xi_0},\ Q = \frac{1}{x_0},\ R = 0,$$

$$R_1 = 0,$$

$$\operatorname{tg} 2\vartheta_2 = 0,\ \text{d. h.}\ \vartheta_2 = 0^0 \text{ oder } 90^0,$$

wobei es gleichgiltig ist, welchen von den beiden Werthen für ϑ_2 man wählt. Die Abscissen-Gleichungen lassen sich dann auf die von Reusch gegebene Form bringen:

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{n \cdot r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1$$

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_2}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{\xi_0} + \frac{n r_1 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_1} = 1.$$

Analoge Formeln gelten natürlich für die Brechung an der zweiten Fläche.

Im Tageblatt der Naturforscherversammlung in Wien (1856) gibt Weierstrass eine Construction des durchgehenden Strahles an. Später geschah dies von Reusch[1]). Auch von Lippich[2]) haben wir für obigen speciellen Fall geometrische Constructionen des Ortes der Brennlinien. Die nähere Betrachtung dieses Falles liegt aber ausserhalb der Aufgabe.

---

1) Reusch, Pogg. Ann. (1867).

2) Lippich, Denkschriften d. kaiserl. Akad. der Wiss. zu Wien, math. Klasse (1867).

Bezüglich der Inclinationen der Brennlinien β_1 β_2, α_1 α_2 gilt folgendes: Wie die Azimuthe der Brennebenen $\Sigma_1 \alpha_1 (\vartheta_2)$, $\Sigma_1 \alpha_2 (90^0 + \vartheta_2)$ gegen $\Sigma \beta_1 (\vartheta_1)$ und $\Sigma \beta_2 (90^0 + \vartheta_1)$ variiren, so variiren auch die Inclinationen der Brennlinien $\beta_1 (\psi')$, $\alpha_1 (\psi'')$, $\beta_2 (\psi_1)$, $\alpha_2 (\psi_2)$ gegen den Hauptstrahl. Prof. Matthiessen [1]) hat gezeigt, dass, wenn $\vartheta_1 = 90^0$, also auch $\vartheta_2 = 90^0$ ist, folgende Relationen gelten:

$$\frac{\operatorname{cotg} \psi'' \cdot \operatorname{cotg} e_1 \cdot \cos e_1 (x_2 - x_1)}{x_1^2 \cdot x_2} = \frac{\operatorname{cotg} \psi' \cdot \operatorname{cotg} e_2 \cdot \cos e_2 (x_0 - \xi_0)}{\xi_0^2 \quad x_0}$$

$$\frac{\operatorname{cotg} \psi_2 \cdot \operatorname{cotg} e_1 \cdot \dfrac{x_2 - x_1}{x_1} - 1}{x_2^2} - \frac{\operatorname{cotg} \psi_1 \cdot \operatorname{cotg} e_2 \quad \dfrac{x_0 - \xi_0}{\xi_0}}{x_0^2} = \frac{1}{r_1} \left(\frac{\cos e_2}{\xi_0} - \frac{\cos e_1}{x_1} \right),$$

wozu noch die beiden folgenden kommen:

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{n r_1 \cdot \sin e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1$$

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_2}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{\xi_0} + \frac{n r_1 \cdot \sin e_1 \cdot \cos^2 e_1}{\sin (e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_1} = 1.$$

Sind also die Brennlinien vor dem Einfall senkrecht zum Hauptstrahl, d. h. $\psi' = 90^0$, $\psi_1 = 90^0$, so bleibt $\psi'' = 90^0$, nicht aber ψ_2. Denn aus der zweiten Gleichung folgt:

$$\operatorname{cotg} \psi_2 = \frac{x_1 x_2^2 \left\{ \dfrac{1}{r_1} \left(\dfrac{\cos e_2}{\xi_0} - \dfrac{\cos e_1}{x_1} \right) + \dfrac{1}{x_2^2} - \dfrac{1}{x_0^2} \right\}}{(x_2 - x_1) \operatorname{cotg} e_1}.$$

Mithin ist die Ansicht verschiedener Physiker, dass stets die Brennlinien auch nach der Brechung zum Hauptstrahle senkrecht bleiben, wenn sie es vor der Brechung waren, irrig.

Ist das einfallende Strahlenbündel homocentrisch, also $\xi_0 = x_0$, so geht die Gleichung mit Einführung der beiden Abscissen-Gleichungen über in:

$$\operatorname{cotg} \psi_2 = \frac{x_2 - x_0 \cdot \cos (e_2 - e_1)}{x_0 \cdot \sin (e_2 - e_1)}.$$

Der geometrische Sinn davon ist, dass die zweite Brennlinie in der Centrale liegt. (Reusch.)

Liegt eine neue brechende Fläche so, dass das Azimuth der neuen Einfallsebene mit der vorangehenden Brechungsebene 90^0 beträgt, so werden alle vier Inclinationen von 90^0 verschieden.

1) Matthiessen, Vorlesungen etc. § 32.

Nimmt man ein astigmatisches Quadrat statt der beiden Brennlinien als Object, so ändert das nichts an diesen Betrachtungen.

§ 3.
Grösse der Bilder.

Es erübrigt, das Verhältnis von Object- und Bildgrösse festzustellen.

Bei paraxialen Strahlen gilt bekanntlich der Satz, dass sich die Objectgrösse zur Bildgrösse verhält wie die Entfernungen des Objects und Bildes von den Knotenpunkten. Für schiefen Durchgang der Strahlen gilt nun etwas ganz ähnliches, wenn die Strahlen parallel durchgehen; auch hier lässt sich zeigen, dass Object- und Bildwinkel einander gleich sind.

Dabei spielen die Directions- und Seitenpunkte eine Rolle. Die Directionspunkte (D und D_1) sind die Schnittpunkte der Strahlen, welche dem Strahlenfächer zweiter Art angehören; die Seitenpunkte (E und E_1) die Schnittpunkte der Strahlen des Strahlenfächers erster Art (Fig. 2). Strahlenfächer erster Art also, die vom optischen Mittelpunkt ausgehen, werden durch die Fläche so gebrochen, als wenn sie von den Punkten E und E_1 ausgingen. Und analog die Strahlenfächer zweiter Art. Bei paraxialem Durchgange fallen Directions- und Seitenpunkte in die Knotenpunkte hinein. Je schiefer dagegen der Auffall der Strahlen ist, um so weiter rücken die Directions- und Seitenpunkte von den Knotenpunkten ab, und zwar erstere auf der Axe, hingegen letztere auf einer complicirten Curve, die sich von der Axe und von der Mitte zugleich entfernt.

Man kann die Directions- und Seitenpunkte als schiefwinklige Cardinalpunkte der Linse bezeichnen, da sie für den schiefen Durchgang der Strahlen dieselbe Function haben, wie die Haupt- und Knotenpunkte für paraxiale Strahlenbündel.

Setzt man fest, dass ist:

$\partial\gamma$	der	halbe	Objectwinkel	von	β_2	bei E
$\partial\delta$	„	„	„	„	β_1	„ D
$\partial\gamma_1$	„	„	Bildwinkel	„	ζ_2	„ E_1
$\partial\delta_1$	„	„	„	„	ζ_1	„ D_1,

so hat man folgende Gleichungen [1]):

$$A\,E\cdot\partial\gamma = r_1\cdot\cos e_2\cdot\partial\vartheta \qquad (1$$

$$B\,E_1\cdot\partial\gamma_1 = r_2\cdot\cos\varepsilon_2\cdot\partial\lambda \qquad (2$$

$$A\,C\cdot\partial\psi_1 = r_1\cdot\cos e_1\cdot\partial\vartheta \qquad (3$$

$$B\,C\cdot\partial\psi_1 = r_2\cdot\cos\varepsilon_1\cdot\partial\lambda \qquad (4$$

1) Matthiessen, Vorlesungen etc. § 47.

$$A D \cdot \partial \delta = A C \cdot \partial \psi \qquad (5$$
$$B D_1 \cdot \partial \delta_1 = B C \cdot \partial \psi, \qquad (6$$

worin $\partial \psi$ den Winkel bezeichnet, welchen $A B$ mit den Randstrahlen des Strahlenfächers zweiter Art bildet.

$$(1 \cdot (4$$
$$(2 \cdot (3$$

gibt:

$$\frac{A E \cdot B C}{B E_1 \cdot A C} \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial \gamma_1} = \frac{\cos e_2 \cdot \cos \varepsilon_1}{\cos \varepsilon_2 \cdot \cos e_1}.$$

Für parallelen Durchgang wird aber sein:

$$\frac{A E}{A E_1} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{B C}{A C} = \frac{r_2}{r_1},$$
$$\varepsilon_2 = e_2, \quad \varepsilon_1 = e_1,$$

also:

$$\partial \gamma = \partial \gamma_1.$$

Weiter folgt aus den Gleichungen 5 und 6:

$$\frac{\partial \delta}{\partial \delta_1} = \frac{A C}{B C} \cdot \frac{B D_1}{A D} = 1,$$

also:

$$\partial \delta = \partial \delta_1.$$

Da nun offenbar folgende Proportionen bestehen:

$$\beta_1 : \zeta_1 = \beta_1 D \cdot \partial \delta : \zeta_1 D_1 \cdot \partial \delta_1$$
$$\beta_2 : \zeta_2 = \beta_2 E \cdot \partial \gamma : \zeta_2 E_1 \cdot \partial \gamma_1,$$

so erhält man schliesslich:

$$\beta_1 : \zeta_1 = \beta_1 D : \zeta_1 D_1$$
$$\beta_2 : \zeta_2 = \beta_2 E : \zeta_2 E_1.$$

Das heisst also: Die Objectgrösse verhält sich zur Bildgrösse wie die Entfernungen einmal von den Directionspunkten, ein anderes Mal von den Seitenpunkten. Dabei hat man die Abstände bei denjenigen Hälften der astigmatischen Objecte, die aus Strahlenfächern zweiter Art bestehen, von den Directionspunkten, bei den andern Hälften von den Seitenpunkten zu nehmen.

§ 4.

Ueber Periskopie von Linsen.

Die entwickelten Sätze gelten nur für homogene Linsen. Sobald die Bedingung der Homogeneität nicht erfüllt ist, werden die Verhältnisse ganz andere.

Betrachten wir z. B. das menschliche Auge. Auf dasselbe fallen Strahlen aus allen möglichen Richtungen auf, sodass nicht nur paraxiale,

sondern auch stark peripherische Strahlen zur Verwendung kommen. Wäre nun die Linsencombination des Auges aus homogenen Medien bestehend, so könnte nirgends ein deutliches Bild entstehen. Das Auge ist aber durch besonderen Bau der Krystalllinse in hohem Maasse periskopisch, d. h. es ist geeignet, auch schief auffallende Strahlen, zugleich mit paraxialen, auf der Retina zu vereinigen. Die Schichtung der Linse bewirkt für die peripherischen Strahlen einen hohen Grad von Aplanatismus. Der geringe Astigmatismus, der noch bleibt und die Accomodation wiederum erleichtert, wird durch günstige Lage und Krümmung der Retina ziemlich unschädlich gemacht. Vermag der Mensch doch noch Bilder von seitlichen Objecten wahrzunehmen, die von der Augenaxe schläfenwärts um 90^0, nasalwärts um 60^0 abstehen [1]), sodass sein Gesichtsfeld in wagerechter Richtung 150^0 umfasst.

Mathematische Rechnungen ergeben, dass die geometrischen Oerter für beide Brennlinien im Durchschnitt Curven sind, welche in der Nähe der Retina verlaufen, so zwar, dass die eine innerhalb des Glaskörpers, die andere ausserhalb desselben verläuft. Ihre Entfernungen von der Retina wachsen von 0 bis zu 1,6 resp. 2,6 mm für das Auge *A* von Helmholtz. Die Retina befindet sich hiernach angenähert in der Mitte zwischen diesen beiden Curven, und dass diese Lage die günstigste ist, ist augenscheinlich.

Auch bei künstlichen Linsen kann man von Periskopie reden, indem man den Grad der Vollkommenheit derselben nach der sog. Bildgüte *B* bemisst.

Je kleiner die Brennstrecke, desto grösser ist die Güte eines astigmatischen Bildes, wobei allerdings die Grösse des letzteren ebenfalls in Rechnung gezogen werden muss. Für sehr dünne Linsen findet man leicht, dass die Güte eines Bildes allein vom Incidenzwinkel ψ_0 abhängt [2]). Darf die Dicke der Linse nicht vernachlässigt werden, so ist es schwer, allgemeine Ausdrücke aufzustellen. Beschränkt man sich jedoch auf solche Winkel, deren Sinus-Potenzen von der dritten ab vernachlässigt werden dürfen, so gilt für parallelen Durchgang der Strahlen das Gesetz, dass die Bildgüte dem Quadrate des Incidenzwinkels umgekehrt proportional ist.

---

1) Schön, Ueber die Brechung seitlich einfallender Strahlen in der Linse. Sitzungsberichte der Heidelberger ophthalmolog. Ges. (1877). — Matthiessen, Die Differentialgleichungen der Dioptrik der geschichteten Krystalllinse. Pflüger's Archiv f. d. ges. Physiologie Bd. 19 (1879). — Stammeshaus, Ueber die Lage der Netzhautschale zur Brennfläche des dioptrischen Systems des menschlichen Auges. Archiv f. Ophthalmologie Bd. 20 (1874).

2) L. Hermann, Ueber Brechung bei schiefer Incidenz, mit besonderer Berücksichtigung des Auges. Pflüger's Archiv f. d. ges. Physiologie Bd. 20 S. 371 (1879).

Zur Ableitung dieser Gesetze ist folgende von Hermann aufgestellte Formel zu verwenden:

$$\frac{1}{B} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_2 + \alpha_2},$$

worin φ_1 und φ_2 die hinteren Brennweiten der Linse von der zweiten Fläche abgerechnet, und α_2 den Abstand des Austrittspunktes des dünnen Strahlenbündels von dem zweiten Directionspunkte bedeuten. (Fig. 2, worin $BD_1 = \alpha_2$, $BE_1 = \beta_2$; $AD = \alpha_1$, $AE = \beta_1$.)

Besser noch ist die von Matthiessen aufgestellte Formel:

$$\frac{1}{B} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\frac{1}{2}(\varphi_1 + \varphi_2) + \alpha_2},$$

weil in derselben keines der Bilder bevorzugt ist.

Die Werthe sind folgende:

$$\varphi_1 = \frac{-\cos^2 e_2 \cdot r_2}{A} \cdot \frac{n r_1 \cdot \cos^2 e_1 - A T}{n(r_1 + r_2)\cos^2 e_1 - A T}$$

$$\varphi_2 = \frac{-r_2}{A} \cdot \frac{n r_1 - A T}{n(r_1 + r_2) - A T}$$

$$A = \frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1} = n \cdot \cos e_1 - \sqrt{1 - n^2 \cdot \sin^2 e_1}$$

$$T = (r_1 + r_2) \cdot \cos e_1 - \sqrt{\left\{D^2 - (r_1 + r_2)^2 \cdot \sin^2 e_1\right\}}$$

$$\sin e_1 = \frac{D \cdot \sin \psi_1}{r_1 + r_2}$$

$$\sin \psi_0 = \left\{n(r_1 + r_2) - A T\right\} \sin e_1,$$

und zwar immer für parallelen Durchgang der Strahlen.

Im allgemeinen wird die Relation sehr complicirt, so dass man genöthigt ist, Näherungswerthe einzuführen.

Bedeutend einfacher wird der Ausdruck für die Bildgüte, wenn man die Bilddistanzen von den zugehörigen inneren Cardinalpunkten abrechnet, d. h. wenn man setzt:

$$\frac{1}{B} = \frac{(\varphi_2 + \alpha_2) - (\varphi_1 + \beta_2)}{\varphi_2 + \alpha_2}.$$

Hierin ist:

$$\beta_2 = \frac{-r_2 \cdot T \cdot \cos^2 e_2}{n(r_1 + r_2) \cdot \cos^2 e_1 - A T}$$

$$\alpha_2 = \frac{-r_2 \cdot T}{n(r_1 + r_2) - A T},$$

also:

$$\varphi_2 + \alpha_2 = -\frac{1}{A} \cdot \frac{n\, r_1\, r_2}{n\,(r_1 + r_2) - A\,T}$$

$$\varphi_1 + \beta_2 = -\frac{\cos^2 e_2}{A} \cdot \frac{n\, r_1\, r_2 \cdot \cos^2 e_1}{n(r_1 + r_2)\cos^2 e_1 - A\,T}.$$

Beschränkt man sich auch hier auf solche Winkel, deren Sinus-Potenzen von der dritten ab vernachlässigt werden dürfen, so ist es zunächst einerlei, ob im Nenner $\varphi_2 + \alpha_2$ oder $\varphi_1 + \beta_2$ steht. Ferner ist es gleichgiltig, welche Seite der Linse dem Objecte zugekehrt ist, da r_1 und r_2 symmetrisch vorkommen, während dies bei der vorigen Bemessung der Bildgüte nicht der Fall war. Man erhält angenähert:

$$A = (n-1)\left(1 + \frac{n}{2} \cdot \sin^2 e_1\right)$$

$$T = d\left(1 + \frac{r_1 + r_2}{D} \cdot \sin^2 e_1\right)$$

$$A\,T = (n-1)\,d\left\{1 + \frac{1}{2}\left(n + \frac{r_1 + r_2}{D}\right) \cdot \sin^2 e_1\right\}.$$

Setzt man diese Werthe in die Ausdrücke für $\varphi_2 + \alpha_2$ und $\varphi_1 + \beta_2$ ein, so resultirt:

$$\frac{1}{B} = \left\{n^2 - \frac{(n-1)\,d}{n\,(r_1 + r_2) - (n-1)\,d}\right\} \cdot \sin^2 e_1$$

oder

$$\frac{1}{B} = \frac{D^2}{\{n\,(r_1 + r_2) - (n-1)\,d\}^2}\left\{n^2 - \frac{(n-1)\,d}{n\,(r_1 + r_2) - (n-1)\,d}\right\} \sin^2 \psi_0$$

da angenähert:

$$\sin e_1 = \frac{D}{n\,(r_1 + r_2) - (n-1)\,d} \cdot \sin \psi_0.$$

Der Ausdruck:

$$B \cdot \sin^2 \psi_0 = P$$

ist dann ein Maass für die Periskopie einer Linse, indem derselbe vom Incidenzwinkel unabhängig ist.

Sobald die Constanten einer Linse bekannt sind, lässt sich also dieser Werth für die Bildgüte bei gegebenem Incidenzwinkel unmittelbar berechnen.

Es zeigt sich hier noch eine Merkwürdigkeit: Bei schiefer Incidenz auf eine sphärische Fläche gelten, wie oben gezeigt, folgende Abscissen-Gleichungen [1]):

1) Vergl. auch: L. Hermann, Ueber schiefen Durchgang von Strahlenbündeln durch Linsen etc. S. 8 ff. Zürich 1874.

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_0} + \frac{n r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{1}{x_2} = 1$$

$$\frac{-r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos^2 e_2}{x_0} + \frac{n r_1 \cdot \sin e_1}{\sin(e_2 - e_1)} \cdot \frac{\cos^2 e_1}{x_1} = 1.$$

Setzt man hierin einmal $x_2 = \infty$, das andere Mal $x_1 = \infty$, so erhält man in den sich für x_0 ergebenden Werthen die beiden vorderen Brennweiten der ersten Fläche, von der brechenden Fläche abgerechnet:

$$f_2 = -\frac{r_1}{A} \qquad f_1 = -\frac{r_1 \cdot \cos^2 e_2}{A}.$$

Misst man die Abstände von den zugehörigen Directions- resp. Seitenpunkten ab, so kommt:

$$f_2 + \alpha_1 = -\frac{1}{A} \cdot \frac{n r_1 (r_1 + r_2)}{n(r_1 + r_2) - AT}$$

$$f_1 + \beta_1 = -\frac{\cos^2 e_2}{A} \cdot \frac{n r_1 (r_1 + r_2) \cdot \cos^2 e_1}{n(r_1 + r_2)\cos^2 e_1 - AT},$$

und es zeigt sich, dass:

$$\frac{(f_2 + \alpha_1) - (f_1 + \beta_1)}{f_2 + \alpha_1} = \frac{(\varphi_2 + \alpha_2) - (\varphi_1 + \beta_2)}{\varphi_2 + \alpha_2} = \frac{1}{B}.$$

Man braucht hiernach nur die vorderen Brennweiten für den schiefen Einfall zu kennen, um den Werth der Bildgüte angeben zu können.

Bestimmt man die Bildgüte der Krystalllinse empirisch für verschiedene Incidenzwinkel, und berechnet man sodann die Bildgüte einer homogenen Linse von gleicher optischer Kraft, so findet man, dass die Krystalllinse vor der anderen einen bedeutenden periskopischen Vorzug hat. Die Längen der Brennstrecken sind nämlich im letzteren Falle bedeutend grösser als im ersteren [1]).

III. Theil.

Bestätigung der Formeln durch den Versuch.

§ 1.

Anordnung des Versuchs.

Die im physikalischen Institut ausgeführten Experimente waren folgendermaassen angeordnet (Fig. 4):

Als Lichtquelle diente eine kleine quadratische Oeffnung in einem eisernen Cylinder, der die helle Flamme eines Argandbrenners über-

1) Vergl. M. Peschel, Experimentelle Untersuchungen über die Periskopie der Krystalllinse. Pflüger's Archiv f. d. ges. Physiologie Bd. 20 S. 338 (1879).

deckte. Von diesem leuchtenden Objecte (L) liess ich ein Strahlenbündel schief auf eine beliebige biconvexe Linse auffallen, jedoch so, dass die Randstrahlen durch eine Blende abgehalten wurden. Dadurch erhielt ich hinter der Linse ein Bild von dem Quadrat, und zwar ein astigmatisches Bild, wie es der vorliegenden Aufgabe zu Grunde gelegt ist, dessen Bildweiten (ξ_1 und ξ_2) sich leicht messen liessen. Das austretende Strahlenbündel, welches das astigmatische Quadrat sozusagen als Brennlinien enthielt, liess ich wiederum auf eine andere biconvexe Linse auffallen, deren Constanten vorher bestimmt waren, welche ferner mit einer Blende versehen war, die in der Mitte eine kreisrunde Oeffnung von 8 mm Radius hatte, um parallelen Durchgang der Strahlen zu bewirken. Bei parallelem Durchgange verlaufen die Strahlen innerhalb der Linse ja in der Nähe der Axe. Es wäre im Princip correcter gewesen, eine noch kleinere Oeffnung in der Blende zu wählen, aber dies zeigte beim Versuch den Uebelstand, dass die Bilder zu lichtschwach, kaum sichtbar wurden; namentlich war dies bei dem zweiten Bilde der Fall. Beide Linsen befanden sich auf Stativen und standen stets so, dass ihre Aequatorialebenen vertical waren.

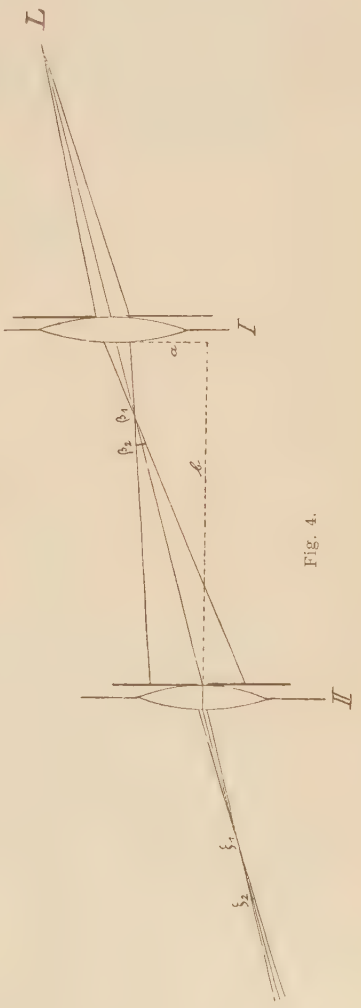

Fig. 4.

Die Seiten des zu Grunde zu legenden astigmatischen Quadrats sollen ein Azimuth gegen den Axenschnitt haben. Sind die Seiten des ursprünglichen leuchtenden Objects vertical resp. horizontal, und ist der verticale Axenschnitt der Linse I zugleich Einfallsebene, so findet die Bedingung nicht statt, denn dann wird der Zähler in dem Ausdrucke für $\operatorname{tg} \vartheta = 0$, d. h. ϑ wird $= 0^0$ oder 90^0.

Stellt man jedoch Linse I etwas schief, sodass die Einfallsebene gegen die Horizontale geneigt wird, so nehmen auch β_1 und β_2 eine Neigung gegen den verticalen Axenschnitt an, die mit wachsender

Drehung der Linse wächst. Um dies experimentell nachzuweisen, wurde die Linse mit ihrem Stativ, an welchem ein kleiner Zeiger angebracht war, auf einen mit einer Gradeintheilung versehenen Kreis gestellt, sodass bei einer Drehung der Linse der entsprechende Winkel abgelesen werden konnte. Die Neigung der Bilder gegen den verticalen Axenschnitt wurde hier wie auch bei den späteren Versuchen gemessen, indem die Bilder nacheinander auf einer kleinen Cartonscheibe aufgefangen wurden, welch' letztere in 360° eingetheilt und derart vermittelst einer Nadel an einem Stativ aufgehängt war, dass die Verbindungslinie 0° — 180° von selbst die Lage des Lotes annahm. Natürlich musste die Scheibe senkrecht gegen die durch das ausfallende Strahlenbündel gelegte Verticalebene hängen.

Bei den Versuchen ergaben sich folgende Daten:

Stellung des Zeigers	Einstellung von β_2
65°	20°
70°	15°
75°	10°
80°	5°
85°	0°
90°	— 5°
95°	— 10°
100°	— 15°
105°	— 20°

Man sieht, dass bei einer Einstellung des Zeigers auf 85° die Linse keine schiefe Stellung hatte.

Die Linse II dagegen muss so gestellt sein, dass das durch die Linse I erzeugte Strahlenbündel gerade auffällt. In diesem Falle hat man nämlich in dem auf der kleinen Scheibe abgelesenen Winkel von β_1 zugleich das Azimuth für Linse II gefunden, welches der Rechnung zu Grunde zu legen ist, während bei jeder anderen Stellung der Linse II dies schwer zu bestimmen sein würde wegen Verrückung der Einfallsebene aus dem verticalen Axenschnitt heraus.

Damit die beiden Linsen die richtige Stellung bekamen, wurde folgendermaassen verfahren:

Zunächst wurde die erste Linse so gestellt, dass die durch dieselbe erzeugten Bilder kein Azimuth hatten, und das austretende Strahlenbündel auf die zweite Linse auffallen lassen, wobei diese so lange verschoben wurde, bis die kleine im Diaphragma befindliche kreisrunde Oeffnung sich in der Mitte der auf jenem entstehenden symmetrischen

Figur (Ellipse) befand. Wurde alsdann Linse I mehr oder weniger gedreht, so erhielten ihre Bilder ein grösseres oder kleineres Azimuth, die Richtung des austretenden Hauptstrahls blieb aber dieselbe, was man daran erkennen konnte, dass zwar die helle Figur auf dem Diaphragma der Linse II sich gedreht und in die Länge gezogen, seine relative Lage zur Diaphragmenöffnung aber nicht geändert hatte. Man war also sicher, dass Linse II sich in der richtigen Stellung befand.

Das Azimuth des ersten astigmatischen Quadrats wurde ziemlich klein angenommen, weil die Bilder dadurch an Schärfe gewannen.

Wurde jetzt die Höhendifferenz beider Linsenmittelpunkte gemessen (a), ferner die Axenlänge der Linse II von deren vorderer Fläche bis zum Schnittpunkt mit der die hintere Fläche der Linse I in der Axe tangential berührenden Ebene (b), so war damit e_2 und ξ_0, x_0 für die Linse II gefunden, indem:

$$\operatorname{tg} e_2 = \frac{b}{a}$$

$$\xi_0 = \sqrt{a^2 + b^2} - \mathfrak{x}_1$$

$$x_0 = \sqrt{a^2 + b^2} - \mathfrak{x}_2.$$

ξ_0 und x_0 liessen sich natürlich auch direct messen.

Genau genommen hat man in $\frac{b}{a}$ nicht $\operatorname{tg} e_2$ gefunden, sondern $\operatorname{tg} \psi_0$ (Fig. 2); aber ψ_0 weicht von e_2 ungemein wenig ab, wie man aus folgender Tabelle ersehen kann.

Tabelle I.

e_2	ψ_1	ψ_0	ϑ
0°	0°	0°	0°
10°	6° 36′ 21″	10° 4′ 49″	4′ 49″
20°	13° 5′ 44″	20° 9′ 40″	9′ 40″
30°	19° 20′ 37″	30° 14′ 35″	14′ 35″
40°	25° 12′ 10″	40° 19′ 33″	19′ 33″
80°	40° 43′ 23″	80° 35′ 41″	35′ 41″

Die Werthe ergaben sich für gegebenes e_2 aus den Formeln:

$$\sin \psi_1 = \frac{(r_1 + r_2) \sin e_2}{n(r_1 + r_2 - d)}$$

$$\psi_0 = \psi_1 + e_2 - e_1$$

$$\vartheta = \psi_0 - e_2.$$

Also für einen Einfallswinkel von 30° beträgt der Unterschied ϑ noch nicht ganz $^1/_4{}^0$; und bei den folgenden Versuchen sind stets kleinere Einfallswinkel genommen, um einen allzu grossen Astigmatismus zu vermeiden.

Uebrigens lässt sich nach dieser Tabelle durch Interpolation der genauere Werth von e_1 leicht finden, wie es bei den Versuchen auch in Wirklichkeit geschehen ist. Zugleich erlaubt die Tabelle umgekehrt für gegebenen Einfallswinkel e_2 den zugehörigen Werth von ϑ zu finden, sowie denjenigen des Incidenzwinkels ψ_0.

Benutzt wurde eine Linse, für deren Constanten sich als Mittelwerthe aus sieben Messungen folgende Werthe ergaben:

$$r_1 = r_2 = 29{,}75 \text{ cm}$$
$$n = 1{,}528.$$

Ihre Dicke d wurde gefunden zu:

$$d = 0{,}72 \text{ cm}.$$

§ 2.

Resultate des Versuchs. — Ort und Azimuth der Bilder.

Die Versuche ergaben, nach dem Einfallswinkel geordnet, die folgenden Resultate:

Tabelle II.

e_1	$\mathfrak{x}_1$	$\mathfrak{x}_2$	ξ_0	x_0	ϑ_1	ξ_1	ξ_2	ϑ_3
	cm	cm	cm	cm		cm	cm	
13° 20′ 3″	41,6	45,1	63,8	60,3	80°	44,8	53,1	85°
13° 37′ 0″	35,1	38,1	53,5	50,5	82½°	50,2	61,5	88°
15° 44′ 3″	43,2	48,8	51,9	46,3	81°	51,0	69,9	86°
*16° 7′ 0″	30,5	34,0	51,78	48,28	85°	51,3	68,0	88°
16° 55′ 41″	32,9	37,5	56,0	51,4	80°	48,5	61,0	85°
19° 14′ 20″	46,0	37,9	32,0	38,1	85°	57,0	96,0	89°
*19° 45′ 2″	31,4	36,8	64,3	58,8	81°	38,8	50,4	88°
19° 53′ 2″	35,0	41,0	51,7	45,7	88°	45,7	71,0	90°
23° 41′ 40″	27,5	37,4	49,1	39,2	78°	42,6	80,0	87°
24° 12′ 5″	27,5	34,4	33,8	26,9	80°	61,3	278,0	85°
24° 45′ 40″	25,2	33,3	36,9	28,8	79°	55,0	300,0	84°
24° 55′ 30″	27,0	35,0	62,5	54,5	84°	34,0	53,5	88°
27° 17′ 30″	25,5	33,3	41,6	33,8	87°	32,7	141,0	89°
28° 38′ 0″	24,0	36,0	60,9	48,9	85°	29,4	56,0	89°

Einen ganz beliebigen von diesen Versuchen, und zwar den siebenten, habe ich nun herausgegriffen und für denselben die im

II. Theile angegebenen Rechnungsoperationen durchgeführt. Die einzelnen sich dabei ergebenden Resultate sollen im folgenden kurz angegeben werden.

Gegeben ist:

$$\begin{aligned} d &= 0{,}72 \text{ cm} & e_2 &= 19^0\,45'\,2'' \\ r_1 &= 29{,}75 \text{ „} & \xi_0 &= -64{,}3 \text{ cm} \\ r_2 &= -29{,}75 & x_0 &= -58{,}8 \text{ „} \\ \nu &= 1{,}528 & \vartheta_1 &= 81^0. \end{aligned}$$

Gesucht werden:

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \vartheta_3.$$

Mit Hilfe der Formeln 8 findet man:

$$\begin{aligned} P &= -0{,}01558718 \\ Q &= -0{,}01697660 \\ R &= \ \ 0{,}00022326. \end{aligned}$$

Diese Werthe sind in Gl. 12 einzusetzen, um P_1, Q_1, R_1 zu erhalten. Es ergibt sich:

$$P_1 = \frac{-29{,}75 \cdot 0{,}01558718 \cdot \cos^2 19^0\,45'\,2'' + \dfrac{\sin 6^0\,58'\,30''}{\sin 12^0\,46'\,36''}}{1{,}528 \cdot 29{,}75 \cdot \cos^2 12^0\,46'\,36''}$$

$$= 0{,}0031998,$$

$$Q_1 = \frac{-29{,}75 \cdot 0{,}0169766 + 0{,}54911}{1{,}528 \cdot 29{,}75}$$

$$= 0{,}0009692,$$

$$R_1 = \frac{0{,}00022326 \cdot \cos 19^0\,45'\,2''}{1{,}528 \cdot \cos 12^0\,46'\,36''}$$

$$= 0{,}0001410.$$

Daraus findet man:

$$\operatorname{tg} 2\,\vartheta_2 = \frac{2\,R_1}{Q_1 - P_1} = -\frac{0{,}0002820}{0{,}0022306}$$

$$2\,\vartheta_2 = 180^0 - 7^0\,12'\,20'' = 172^0\,47'\,40''$$

$$\underline{\vartheta_2} = 86^0\,23'\,50''.$$

Ferner treten x_1 und x_2 als Wurzeln der Gleichung auf:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 0{,}00416905 \cdot \left(\frac{1}{x}\right) + 0{,}00000308 = 0,$$

woraus sich ergibt:

$$\left(\frac{1}{x}\right)_1 = 0{,}0032087;\ \underline{x_1} = \ 311{,}66 \text{ cm}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)_2 = 0{,}0009604;\ \underline{x_2} = 1041{,}27 \text{ cm}.$$

Da die weitere Rechnung ergibt:

$$T = 0{,}743 \text{ cm},$$

so ist für die zweite Fläche:

$$\xi_{0,1} = 310{,}917 \text{ cm}$$
$$\xi_{0,2} = 1040{,}527 \text{ cm}$$
$$\vartheta_2 = 86^0\,23'\,50''.$$

Dann folgt aus den Gleichungen 14:

$$P_2 = 0{,}00320749$$
$$Q_2 = 0{,}00096995$$
$$R_2 = 0{,}00014144,$$

und daraus durch Einsetzen in Gl. 13:

$$P_3 = \frac{1{,}528 \cdot 29{,}75 \cdot 0{,}00320749 \cdot \cos^2 12^0\,46'\,36'' + 0{,}54911}{29{,}75 \cdot \cos^2 19^0\,45'\,2''}$$
$$= 0{,}0260989,$$
$$Q_3 = 1{,}528 \cdot 0{,}00096995 + \frac{0{,}54911}{29{,}75}$$
$$= 0{,}019941,$$
$$R_3 = 1{,}528 \cdot 0{,}00014144 \cdot \frac{\cos 12^0\,46'\,36''}{\cos 19^0\,45'\,2''}$$
$$= 0{,}0002239.$$

Es ist dann wieder:

$$\operatorname{tg} 2\,\vartheta_3 = \frac{2\,R_3}{Q_3 - P_3} = -\frac{0{,}0004479}{0{,}0061579}$$
$$2\,\vartheta_3 = 180^0 - 4^0\,9'\,32''$$
$$= 175^0\,50'\,28''$$
$$\vartheta_3 = 87^0\,55'\,14''.$$

Ferner:

$$\left(\frac{1}{\xi}\right)^2 - 0{,}0460399 \cdot \left(\frac{1}{\xi}\right) + 0{,}00052039 = 0,$$

so dass sich schliesslich ergibt:

$$\left(\frac{1}{\xi}\right)_1 = 0{,}02605;\ \xi_1 = 38{,}39 \text{ cm}$$
$$\left(\frac{1}{\xi}\right)_2 = 0{,}01998;\ \xi_2 = 50{,}05 \text{ cm}.$$

Das Resultat ist also, dass die Rechnung sehr gut mit der Beobachtung übereinstimmt, denn erstere ergibt:

$$\xi_1 = 38{,}39 \text{ cm},\ \xi_2 = 50{,}05 \text{ cm},\ \vartheta_3 = 87^0\,55'\,14'',$$

und letztere:

$$\xi_1 = 38{,}8 \text{ cm}, \quad \xi_2 = 50{,}4 \text{ cm}, \quad \vartheta_3 = 88^0.$$

Noch für eine zweite Beobachtung habe ich die Rechnung durchgeführt, und zwar für die vierte.

Hierfür sind die gegebenen Grössen folgende:

$$\begin{aligned} e_2 &= 16^0\,7'\,0'' \\ \xi_0 &= -51{,}78 \text{ cm} \\ x_0 &= -48{,}28 \text{ „} \\ \vartheta_1 &= 85^0, \end{aligned}$$

und die Rechnung ergibt:

$$\begin{aligned} P &= -0{,}01932313 \\ Q &= -0{,}02070160 \\ R &= 0{,}00012155 \\ P_1 &= -0{,}0002582 \\ Q_1 &= -0{,}0016270 \\ R_1 &= 0{,}0000777, \end{aligned}$$

so da

$$\begin{aligned} \vartheta_2 &= 86^0\,45'\,38'' \\ x_1 &= -3929{,}19 \text{ cm} \\ x_2 &= -613{,}19 \text{ cm}, \end{aligned}$$

d. h.

$$\begin{aligned} \xi_{0,1} &= -3929{,}9 \text{ cm} \\ \xi_{0,2} &= -613{,}9 \text{ cm}, \end{aligned}$$

da

$$T = 0{,}74 \text{ cm}.$$

Weiter folgt:

$$e_1 = 10^0\,28'\,0'',$$

und

$$\begin{aligned} P_2 &= -0{,}00025885 \\ Q_2 &= -0{,}00162454 \\ R_2 &= 0{,}00007753 \\ P_3 &= 0{,}0193220 \\ Q_3 &= 0{,}0157337 \\ R_3 &= 0{,}0001213, \end{aligned}$$

sodass die Rechnung ergibt:

$$\xi_1 = 51{,}4 \text{ cm}, \quad \xi_2 = 66{,}1 \text{ cm}, \quad \vartheta_3 = 88^0\,4'\,0'$$

während beobachtet wurde:

$$\xi_1 = 51{,}3 \text{ cm}, \quad \xi_2 = 68{,}0 \text{ cm}, \quad \vartheta_3 = 88^0.$$

§ 3.

Fortsetzung. — Grösse der Bilder. Bildgüte und Periskopie.

Auch zur Bestätigung des über die Grösse der Bilder Gesagten wurden einige Versuche angestellt. Folgende Tabelle gibt die Resultate derselben an.

Tabelle III.

$\beta_1 D$	$\zeta_1 D_1$	$\beta_2 E$	$\zeta_2 E_1$	β_1	ζ_1	β_2	ζ_2
cm	cm	cm	cm	mm	mm	mm	mm
30,0	52,5	26,5	118,4	2,3	4,0	3,1	13,5
36,9	55,0	28,8	300,0	2,1	3,1	3,0	31,0
40,2	45,0	32,0	65,4	4,6	5,2	4,9	9,8
* 51,3	56,0	46,4	76,0	9,0	9,7	10,0	16,4
41,6	32,7	33,8	141,0	2,5	2,0	3,5	15,0
48,2	59,5	43,0	80,0	5,8	7,2	6,5	12,0
62,5	34,0	54,5	53,5	2,5	1,2	3,8	3,3
* 55,0	45,5	44,5	61,2	4,3	3,6	5,4	7,6
53,5	50,2	50,5	61,5	3,9	3,6	4,1	5,0
63,9	40,0	56,4	53,5	12,6	8,2	15,0	14,0

Nach den aufgestellten Formeln soll sich verhalten:

$$\beta_1 : \zeta_1 = \beta_1 D : \zeta_1 D_1$$
$$\beta_2 : \zeta_2 = \beta_2 E : \zeta_2 E_1,$$

d. h. es soll sein:

$$\beta_1 \cdot \zeta_1 D_1 = \zeta_1 \cdot \beta_1 D$$
$$\beta_2 \cdot \zeta_2 E_1 = \zeta_2 \cdot \beta_2 E.$$

Man sieht, dass die Tabelle dies vollkommen bestätigt. Greift man z. B. den vierten Versuch heraus, so ist dort:

$$\beta_1 \cdot \zeta_1 D_1 = 504{,}0 \qquad \beta_2 \cdot \zeta_2 E_1 = 760{,}0$$
$$\zeta_1 \cdot \beta_1 D = 497{,}6 \qquad \zeta_2 \cdot \beta_2 E = 760{,}9,$$

und für den achten Versuch ist:

$$\beta_1 \cdot \zeta_1 D_1 = 195{,}65 \qquad \beta_2 \cdot \zeta_2 E_1 = 330{,}48$$
$$\zeta_1 \cdot \beta_1 D = 198{,}0 \qquad \zeta_2 \cdot \beta_2 E = 338{,}26.$$

Bei praktischen Versuchen mit verhältnismässig grossen Object- und Bildweiten spielen solche Entfernungen wie E von D, A von D, D von C und M u. s. w. kaum eine Rolle.

Um über die gegenseitige Lage dieser Punkte eine genauere Vorstellung zu erhalten, als es durch eine Zeichnung möglich ist, die ja manches in vergrössertem Maassstabe darstellen muss, sollen für ein

Beispiel, und zwar für das § 2 zuerst behandelte, einige dieser Dimensionen bestimmt werden.

Zunächst ist bekannt, dass bei parallelem Durchgange d, DD_1, EE_1, T durch den optischen Mittelpunkt proportional den Radien getheilt, im Falle einer gleichseitigen Linse also halbirt werden. Nach Formel 178 der Vorlesungen ist nun das Interstitium der Directionspunkte:

$$DD_1 = \varepsilon' = \frac{T \cdot \sin(e_2 - e_1)}{\sin \psi_0} = 0{,}26 \text{ cm},$$

also:

$$MD = D_1 N = \frac{0{,}72 - 0{,}26}{2} = 0{,}23 \text{ cm}.$$

Ferner ist nach Formel 175 die vordere Seitenpunktsdistanz:

$$AE = \frac{r_1 T \cos^2 e_2}{n(r_1 + r_2)\cos^2 e_1 - \frac{\sin(e_2 - e_1)}{\sin e_1} \cdot T} = 0{,}228 \text{ cm}$$

$$AD = \frac{r_1 \cdot T}{r_1 + r_2} \cdot \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_0} = 0{,}247 \text{ cm}.$$

Demnach fallen die Directions- und Seitenpunkte fast zusammen, und zwar beträgt ihre Entfernung:

$$ED = E_1 D_1 = 0{,}019 \text{ cm}, \text{ d. h. kaum } 1/5 \text{ mm}.$$

Für die Bildgüte und Periskopie ergeben die oben aufgestellten Ausdrücke für unsere Linse mit den Constanten:

$$n = 1{,}528$$
$$d = 0{,}72 \text{ cm}$$
$$r_1 = 29{,}75 \text{ cm}$$
$$r_2 = -29{,}75 \text{ cm}$$

folgende Werthe.

Tabelle IV.

e_2	ψ_0	$\frac{1}{B}$	P
0°	0°	0	
5°	5° 2′ 25″	0,007553	1,0214
10°	10° 4′ 49″	0,03	1,0212
15°	15° 7′ 14″	0,06661	1,0217
20°	20° 9′ 40″	0,1163	1,0214
25°	25° 12′ 5″	0,1775	1,0213
30°	30° 14′ 35″	0,248	1,0214
35°	35° 17′ 4″	0,327	1,0203
40°	40° 19′ 33″	0,4108	1,0194

Für P muss sich ein constanter Werth ergeben, und das trifft überaus nahe zu. Für eine Linse mit anderen Constanten würde sich ein anderer Werth für P ergeben, sodass man auf diese Weise die periskopischen Eigenschaften verschiedener Linsen vergleichen kann.

Zum Schlusse will ich noch bemerken, dass ich die Anregung zu der vorliegenden Arbeit Herrn Prof. Dr. Matthiessen verdanke, und ich möchte auch an dieser Stelle meinem hochverehrten Lehrer hierfür, sowie für die im Verlaufe der Arbeit in liebenswürdigster Weise ertheilte Unterstützung meinen ehrerbietigsten und aufrichtigsten Dank aussprechen.